

AZAR Y PROBABILIDAD



Cuarto Año

Área: Estadística y Probabilidad



Descripción

Habilidades Generales

(pág. 247, segundo ciclo, Estadística y Probabilidad)

Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento.

Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.



Habilidades Específicas

IV grado, Página 251

- 1. Reconocer situaciones aleatorias en diferentes situaciones del contexto.**
- 2. Identificar los distintos resultados simples de un experimento aleatorio.**
- 3. Identificar los resultados a favor de la ocurrencia de un evento.**
- 4. Representar eventos mediante la identificación de sus resultados simples.**
- 5. Determinar eventos más probables, igualmente probables y menos probables de acuerdo a la frecuencia de resultados simples.**



Conocimientos

IV grado, Página 251

Situaciones o eventos aleatorios

Eventos

- Resultados a favor de un evento
- Representación de eventos
- Eventos más probables, igualmente probables y eventos menos probables.



Habilidades Previas

Habilidades generales de I ciclo, Página 47

- **Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociadas con ellas.**
- **Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares.**
- **Plantear y resolver problemas vinculados con el área de Estadística y Probabilidad.**



Propuesta de un problema



Jugando aprendo a tomar decisiones

En la escuela Bella Vista, Julio y Elena juegan con un dado numerado del 1 al 6, deciden tirarlo dos veces, cada uno. Elena dice que ella gana si obtiene dos números consecutivos, sin importar el orden en que salgan; por su parte, Julio propone que el gana si obtiene dos números impares.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

Justifique su respuesta

- I. Los dos amigos tienen igual probabilidad de ganar.
- II. Julio tiene mayor probabilidad de ganar.
- III. Elena tiene mayor probabilidad de ganar.





Trabajo Estudiantil Independiente

La o el docente propicia un espacio de 5 minutos, para que cada estudiante, pueda comprender y pensar sobre lo solicitado.

- Luego, se les solicita que se reúnan en parejas o grupos de tres, para que compartan ideas y formulen estrategias para enfrentar el problema.
- El o la docente estará pendiente de que todos participen en los subgrupos, para lo cual se puede apoyar con preguntas generadoras.

Entre las posibles estrategias del estudiantado

Identificar todos los distintos resultados simples .



		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
Posibles resultados al tirar el Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)



Si se les presenta alguna dificultad se les puede guiar con:

Posibles preguntas generadoras.

¿ De que trata el Juego?

Si jugamos y anotamos que resultados salen. ¿Estaremos seguros de que ya obtuvimos todos los posibles resultados de este juego? Justifique su respuesta

¿ Habrá otra forma, con la cuál podamos determinar todos los posibles resultados que se pueden dar en el juego al tirar el dado dos veces ?

¿Cómo podríamos representar estos resultados?

¿Tienen todos estos resultados igual probabilidad de salir? Justifique

Entre las posibles estrategias del estudiantado

Identifican los distintos resultados a favor de Elena



		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Entre las posibles estrategias del estudiantado

Identifican los distintos resultados a favor de Elena



		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

De los 36 resultados posibles, Elena tendría 10 resultados favorables para ganar en su turno.

Si se les presenta alguna dificultad se les puede guiar con:



Posibles preguntas generadoras.

¿Cuándo gana Elena? ¿Pueden dar ejemplos?

Tiren los dados, si usted fuera Elena ¿Ganaría? ¿Por qué?

¿Qué debemos entender “sin importar el orden en que salgan”?

¿Cuántos y cuáles son los posibles resultados a favor de Elena? Justifique su respuesta

¿Cómo los podemos representar?



Entre las posibles estrategias del estudiantado

Identifica los distintos resultados a favor de Julio

		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
El Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Entre las posibles estrategias del estudiantado

Identifica los distintos resultados a favor de Julio



		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
El Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

De los 36 resultados posibles, Julio tendría 9 posibles resultados favorables para ganar en su turno.



Si se les presenta alguna dificultad se les puede guiar con:

Posibles preguntas generadoras.

¿Cuándo gana Julio? ¿Pueden dar ejemplos?

Tiren los dados, si usted fuera Julio ¿Ganaría? ¿Por qué?

¿Cuántos números impares hay en el primer dado?

Si en el primer dado salió un número impar,

¿Qué debería salir en el segundo dado para ganar?

¿cuántas posibilidades habría para ese número impar?

¿Cuántos y cuáles son los posibles resultados a favor de Julio? Justifique su respuesta

¿Cómo los podemos representar?



Entre las posibles estrategias del estudiantado

Con base en los resultados favorables para Elena y para Julio, ellos y ellas, pueden argumentar:

Como Elena tiene 10 posibles resultados favorables para ganar en su turno y Julio tiene 9 posibles resultados favorables para ganar en su turno y sabiendo que todos los resultados posibles, al tirar un dado dos veces, son igualmente probables entonces podemos asegurar que Elena tiene más posibilidades de ganar que Julio.

Es decir, al tirar un dado dos veces es más probable obtener dos números consecutivos, sin importar el orden; que obtener dos números impares.

Entre las posibles estrategias del estudiantado

Los estudiantes pueden Justifican su respuesta



Situación aleatoria

Tirar un dado numerado del 1 al 6 dos veces.

Evento A: obtener dos números consecutivos, sin importar el orden.

Evento B: obtener dos números impares.



Si se les presenta alguna dificultad se les puede guiar con:

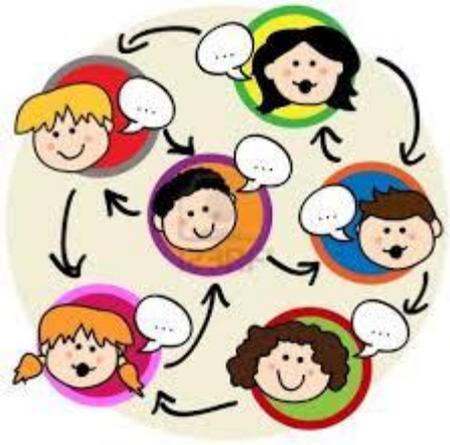
Posibles preguntas generadoras.

De los 36 posibles resultados que podrían obtener Elena y Julio al tirar dos veces un dado

¿Alguno de ellos tiene más resultados posibles a su favor?

¿Bastaría con esto para decir que entonces esa persona tiene más probabilidad de ganar? Si no, ¿qué faltaría?

¿Es igualmente probable que en una jugada salga el 2 y 5 en ese orden; que el 3 y 6 en ese orden?

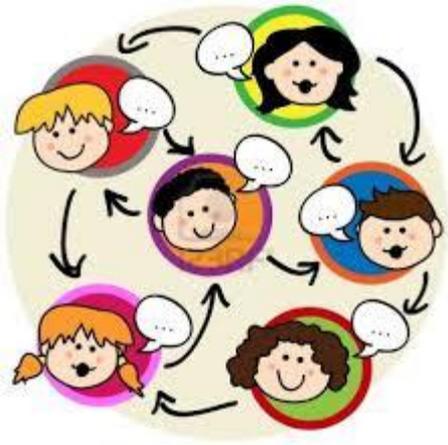


Discusión Interactiva y comunicativa



Se solicita a un grupo que voluntariamente comparta al resto del grupo, como resolvieron el problema.

Los otros subgrupos aportan ideas o estrategias surgidas en sus subgrupos rescatando semejanzas y diferencias, de su forma en que enfrentaron y trataron de resolver el problema.

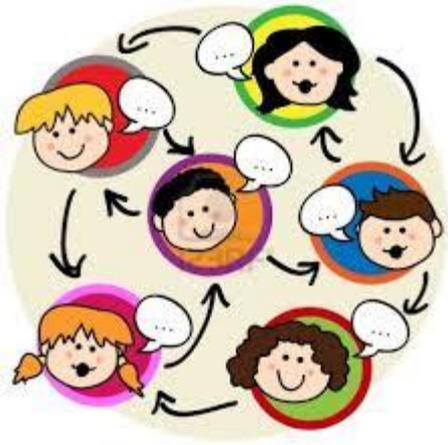


Discusión Interactiva y comunicativa



El docente está atento de integrar al grupo y que se discuta sobre:

- ❖ **Cómo identificaron los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar un dado dos veces (incluyendo intentos fallidos),**
- ❖ **Las formas en que identificaron los resultados favorables a Elena y cómo los de Julio.**
- ❖ **La justificación del por qué uno de los dos tiene más probabilidad de ganar que el otro (en este caso Elena).**
- ❖ **Cómo representaron eventos mediante la identificación de sus resultados simples**



Discusión Interactiva y comunicativa



Además, propicia que se muestren las diferentes representaciones que utilizaron, para la resolución del problema; así como, las diferentes estrategias utilizadas (valorando diferencias y semejanzas).

Es importante, con base en las argumentaciones proponer algunas preguntas generadoras tales como:

Si con solo llevar un registro de los resultados del juego ellos y ellas ¿ Podrían dar con certeza respuesta al problema?

¿ Habrá otra estrategias diferentes a las encontradas por ustedes ?



Clausura o cierre



- Con base en el trabajo desarrollado, por los estudiantes considerando sus aportes, el o la docente, realiza una síntesis cognitiva de los conocimientos trabajados.
- Ofrece ejemplos y propone actividades complementarias



Clausura o cierre



- Situación aleatoria : representa una situación que puede suceder en más de una forma y que no puede determinarse el resultado antes que se produzca.
- Resultados de una situación aleatoria: son todas las posibles maneras o resultados simples en que puede suceder la situación. A este conjunto de resultados simples se le conoce como espacio muestral.



Clausura o cierre



- Evento aleatorio: Es el resultado particular que se espera obtener al realizar la situación aleatoria.
- Resultados a favor de un evento aleatorio: están constituidos por aquellos resultados que se espera obtener y que son parte de todos los posibles resultados simples de una situación aleatoria.

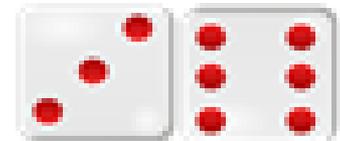
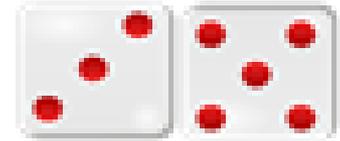
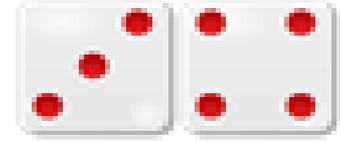
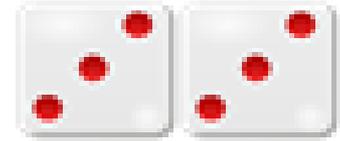
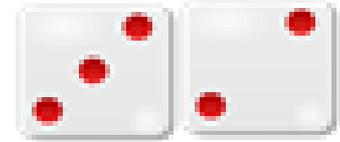
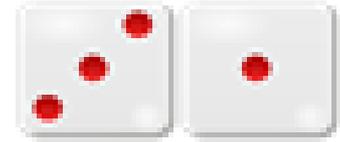
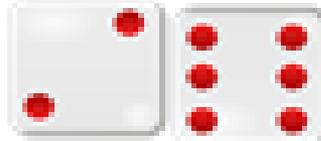
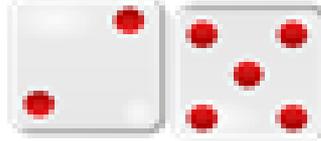
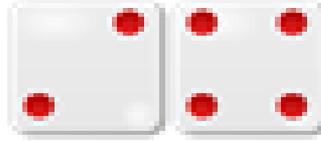
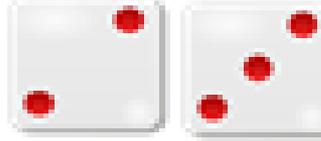
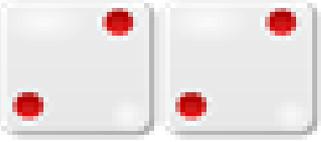
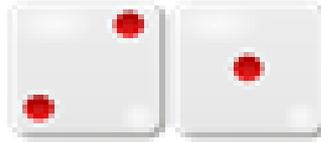
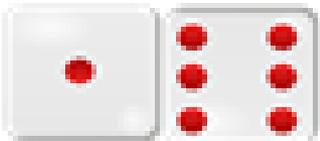
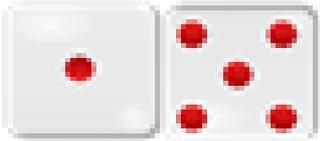
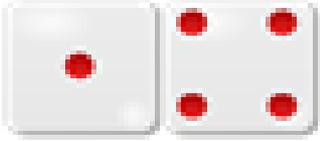
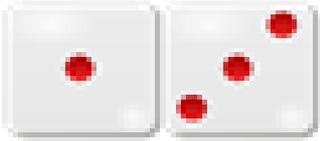
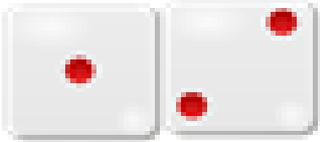
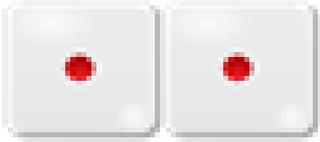


Clausura o cierre



- Eventos más probables: Son aquellos eventos que incluyen más resultados simples a su favor que otros eventos de una situación aleatoria dada.
- Eventos igualmente probables: Son aquellos eventos que tienen la misma cantidad de resultados simples a su favor en una situación aleatoria dada.

Con los dados o representaciones de estos



Simbólicamente

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Expresiones verbales

Técnicas de conteo

Si sale la cara 1 o 6	Para cada uno, solo habría una posibilidad el sucesor de 1 y el antecesor de 6.	En total serían $2 \times 1 = 2$ resultados posibles a su favor.
Si sale la cara 2 o 3 o 4 o 5.	Para cada uno, habría dos posibilidades (su antecesor y su sucesor).	En total serían $4 \times 2 = 8$ resultados posibles a su favor.

Por lo tanto, Elena tiene $8 + 2 = 10$ posibles resultados a su favor

Expresiones verbales

Técnicas de conteo

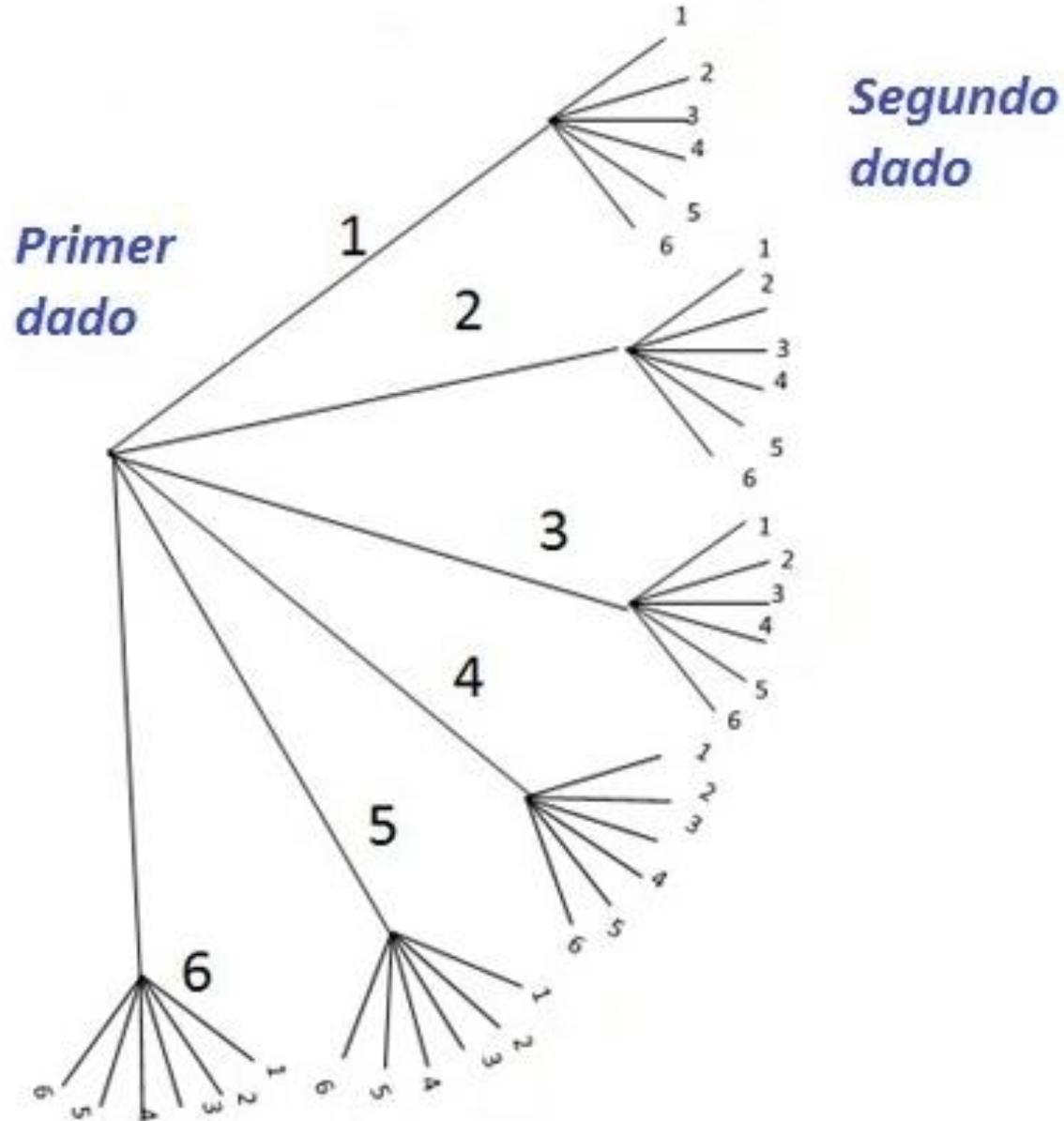
Para el primer
dado hay 3
posibilidades
1 o 3 o 5.

Para el segundo
dado hay 3
posibilidades
1 o 3 o 5.

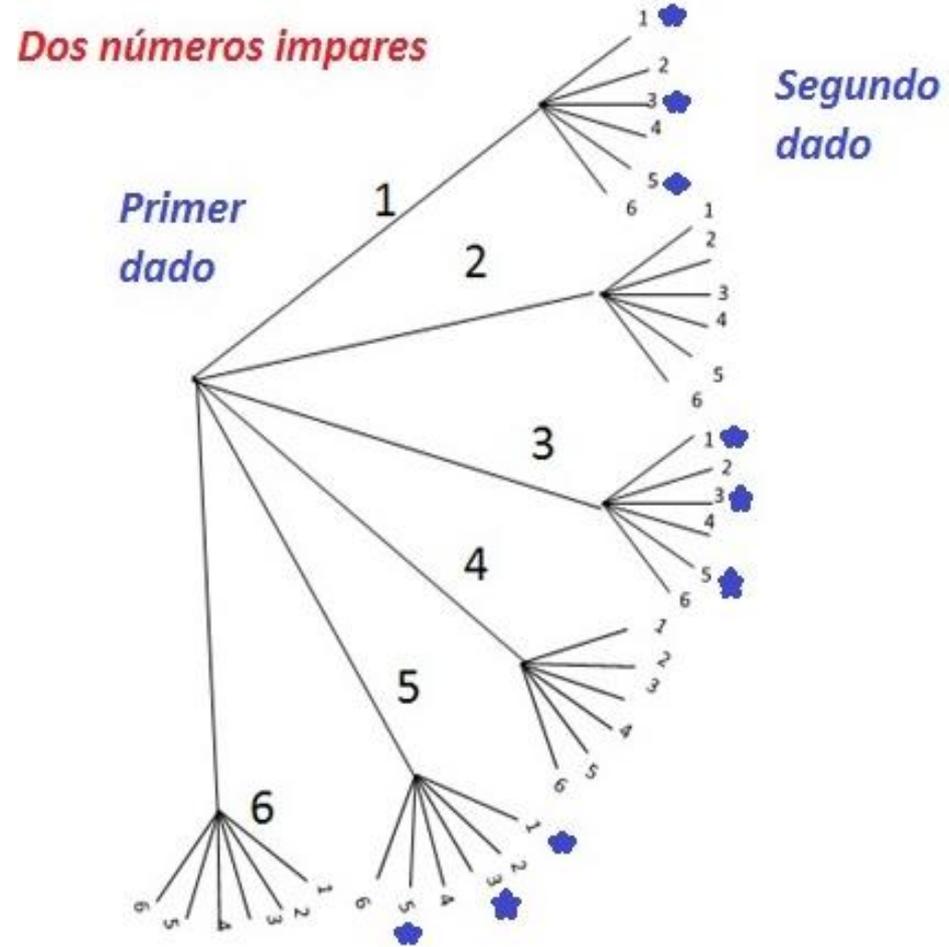
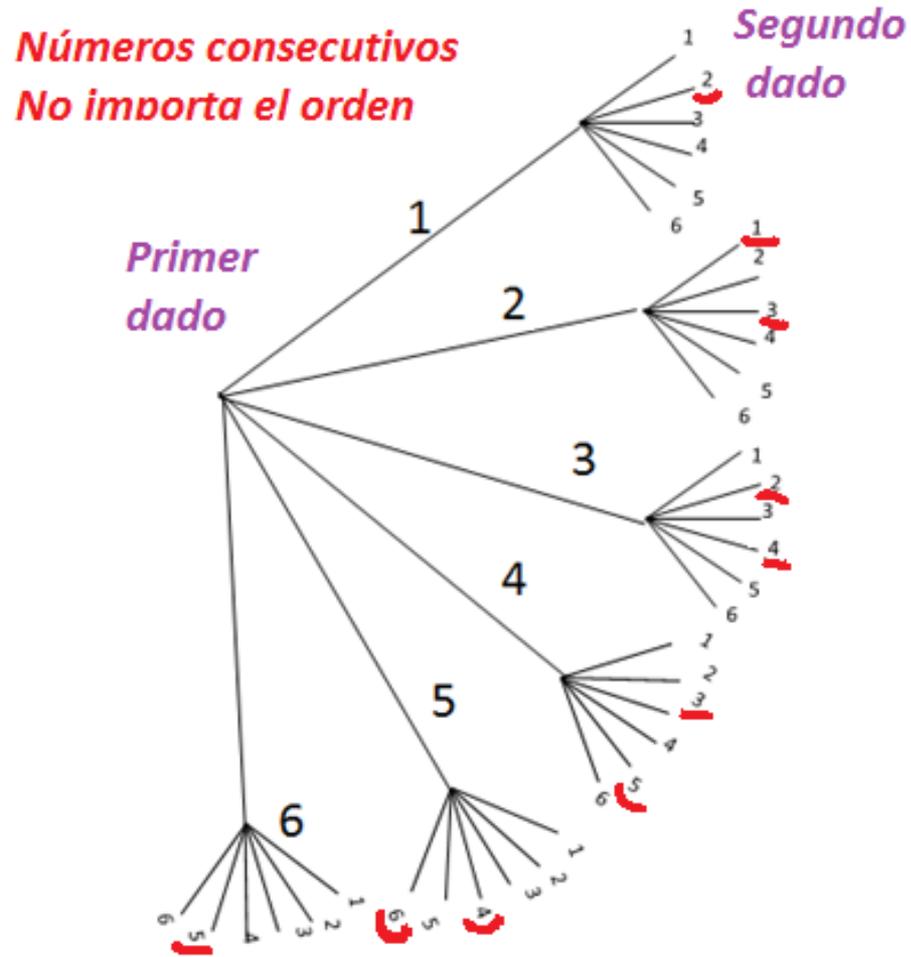
En total serían
 $3 \times 3 = 9$ resultados
posibles a su favor.

Por lo tanto, Julio tiene 9 posibles resultados a su favor

Representación de árbol



Representación de árbol



Representación en forma tabular

Representación en forma tabular

		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
Posibles resultados al tirar el Primer Dado	1	1 y 1	1 y 2	1 y 3	1 y 4	1 y 5	1 y 6
	2	2 y 1	2 y 2	2 y 3	2 y 4	2 y 5	2 y 6
	3	3 y 1	3 y 2	3 y 3	3 y 4	3 y 5	3 y 6
	4	4 y 1	4 y 2	4 y 3	4 y 4	4 y 5	4 y 6
	5	5 y 1	5 y 2	5 y 3	5 y 4	5 y 5	5 y 6
	6	6 y 1	6 y 2	6 y 3	6 y 4	6 y 5	6 y 6

Representación simbólica pares ordenados

Posibles resultados del juego

$(1,1)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$; $(6,1)$; $(1,2)$; $(2,2)$; $(3,2)$; $(4,2)$; $(5,2)$; $(6,2)$;
 $(1,3)$; $(2,3)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,3)$; $(6,3)$; $(1,4)$; $(2,4)$; $(3,4)$; $(4,4)$; $(5,4)$; $(6,4)$;
 $(1,5)$; $(2,5)$; $(3,5)$; $(4,5)$; $(5,5)$; $(6,5)$; $(1,6)$; $(2,6)$; $(3,6)$; $(4,6)$; $(5,6)$; $(6,6)$.

Resultados a favor para Elena

$(1,1)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$; $(6,1)$; $(1,2)$; $(2,2)$; $(3,2)$; $(4,2)$; $(5,2)$; $(6,2)$;
 $(1,3)$; $(2,3)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,3)$; $(6,3)$; $(1,4)$; $(2,4)$; $(3,4)$; $(4,4)$; $(5,4)$; $(6,4)$;
 $(1,5)$; $(2,5)$; $(3,5)$; $(4,5)$; $(5,5)$; $(6,5)$; $(1,6)$; $(2,6)$; $(3,6)$; $(4,6)$; $(5,6)$; $(6,6)$.

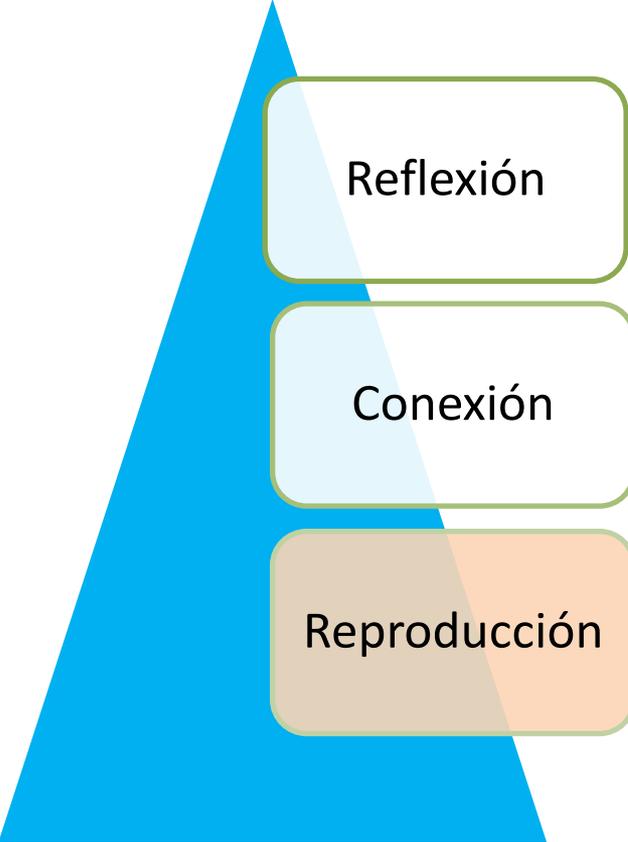
Resultados a favor para Julio

$(1,1)$; $(2,1)$; $(3,1)$; $(4,1)$; $(5,1)$; $(6,1)$; $(1,2)$; $(2,2)$; $(3,2)$; $(4,2)$; $(5,2)$; $(6,2)$;
 $(1,3)$; $(2,3)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,3)$; $(6,3)$; $(1,4)$; $(2,4)$; $(3,4)$; $(4,4)$; $(5,4)$; $(6,4)$;
 $(1,5)$; $(2,5)$; $(3,5)$; $(4,5)$; $(5,5)$; $(6,5)$; $(1,6)$; $(2,6)$; $(3,6)$; $(4,6)$; $(5,6)$; $(6,6)$.

Combinación tabular y pares ordenados

		Posibles resultados al tirar el Segundo Dado					
		1	2	3	4	5	6
Primer Dado	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Se pueden presentar prácticas con retos tales como



Reflexión

Conexión

Reproducción

Si se tiran dos dados numerados del 1 al 6 consideren los siguientes eventos y comparándolos entre si indique cuales son **más probables, igualmente probables y menos probables.**

A: Obtener dos números primos.

B: Obtener dos números mayores que 1, en que uno sea múltiplo del otro.

C: Obtener dos números cuya diferencia sea 2.

D: Obtener dos números cuyo producto sea uno de los números.

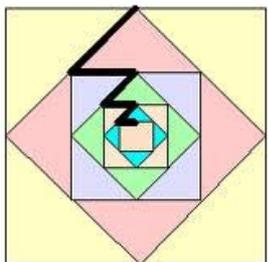
E: Obtener dos números en los que el número correspondiente a la primer tirada sea mayor que el número obtenido de la segunda tirada.

F: Obtener dos números en la que los números sean menores que 4.

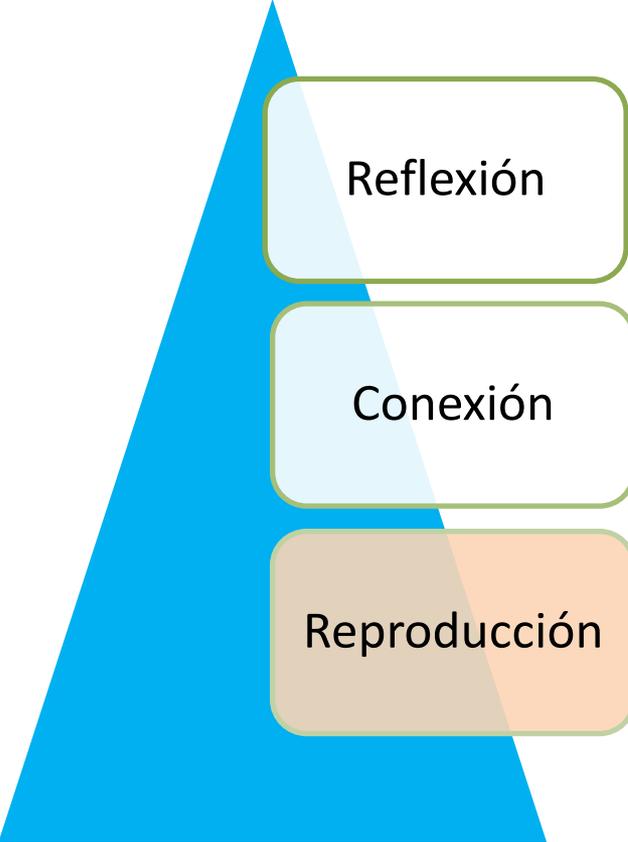
G: Obtener dos números cuyo producto sea mayor que 9 pero menor que 23.

H: Obtener dos números cuya suma sea par.

I: Obtener dos números cuya suma sea impar.



Se pueden presentar prácticas con retos tales como



Reflexión

Conexión

Reproducción

Considere la siguiente situación aleatoria sacar una pieza del domino (6x6) y de los siguientes eventos indique cuales son **más probables**, **igualmente probables** y **menos probables**, entre si

A: al sumar los puntos obtener 4

B: al sumar los puntos obtener 10.

C: al multiplicar la cantidad de puntos obtener 0.

D: que la diferencia de puntos sea 1.

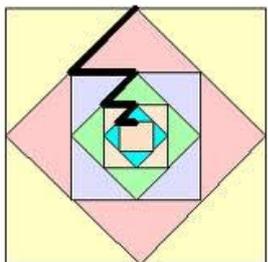
Considere la siguiente situación aleatoria sacar una carta de una baraja de naipes Española y de los siguientes eventos indique cuales son **más probables**, **igualmente probables** y **menos probables**, entre si

A: que la carta sea de corazones rojos

B: que la carta sea un As.

C: que la carta corresponda a una figura.

D: que corresponda a un número primo.



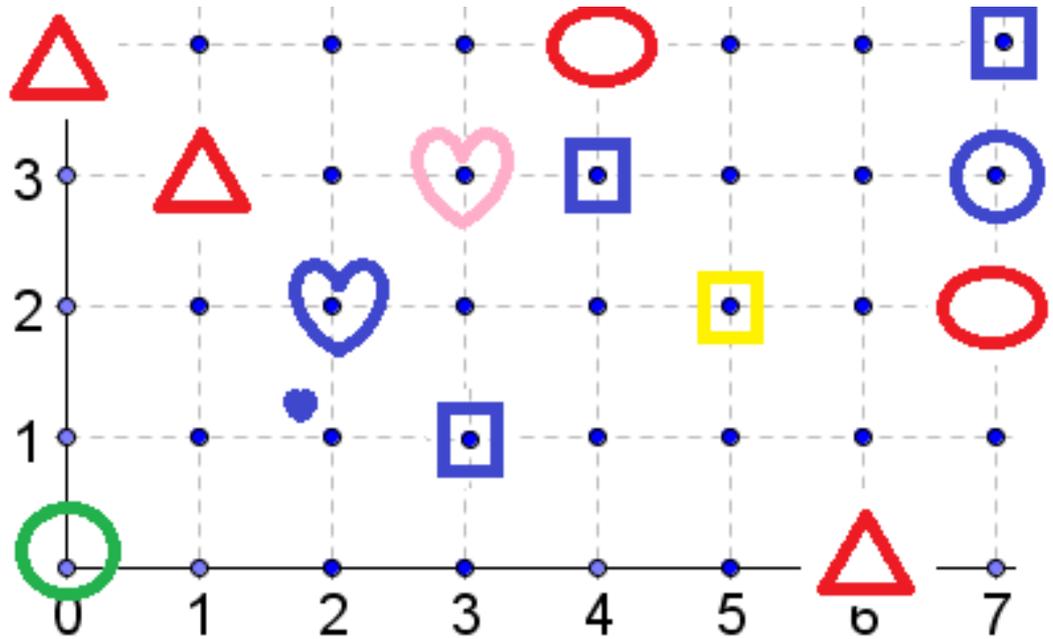
Se pueden presentar prácticas con retos tales como

En una trama de puntos se trazan unos ejes coordenados, si se colocan objetos para que alguien sin ver adivine donde fueron colocados

Reflexión

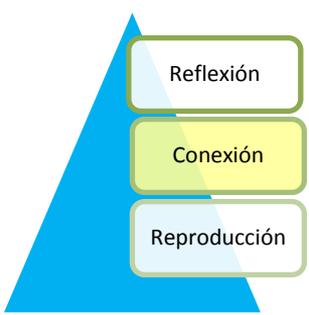
Conexión

Reproducción



Compare los eventos entre sí ¿Cuál de los eventos tiene más probabilidad de que ocurra?

A: Adivinar un triángulo, B: Adivinar un cuadrado, C: Adivinar un corazón, D: Adivinar una figura roja, E: Adivinar una figura azul, F: Adivinar un cuadrado azul, G: Adivinar un círculo.

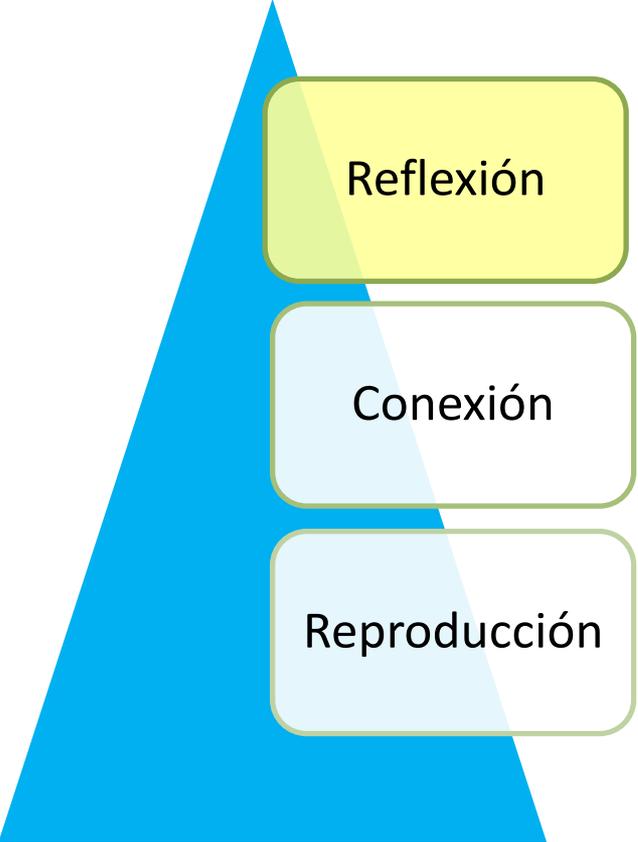


Reflexión

Conexión

Reproducción

Ejercicio adaptado de la XV OMCEP, 2007



Reflexión

Conexión

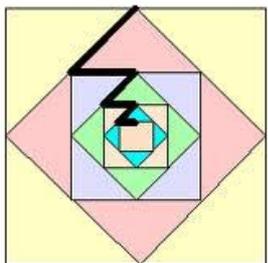
Reproducción

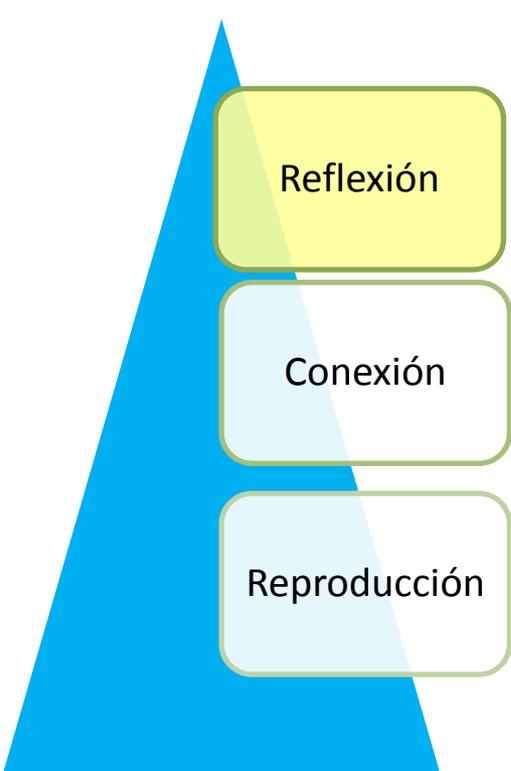
El juego tablero 9 consiste en una tira de papel con nueve cuadrados en las cuales se escriben los números del 1 al 9. el juego consiste en tirar dos dados obtener el total y cubrir uno o dos cuadros del tablero, que sumen o representen dicho valor.

Juéguenlo en forma libre.

Es este juego una situación exclusivamente aleatoria, justifique su respuesta.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---





Reflexión

Conexión

Reproducción

Isabel Cristina y Francisco están realizando un juego. Para ello utilizan un dado de seis caras y otro de doce caras, numerados del 1 al 6 y del 1 al 12, respectivamente.

Si Isabel tira el dado de seis caras, dos veces y suma los resultados y Francisco tira el dado de doce caras, también dos veces, sumando los resultados obtenido.

Podemos afirmar que Isabel y Francisco tienen igual probabilidad de obtener un 7. Justifique su respuesta