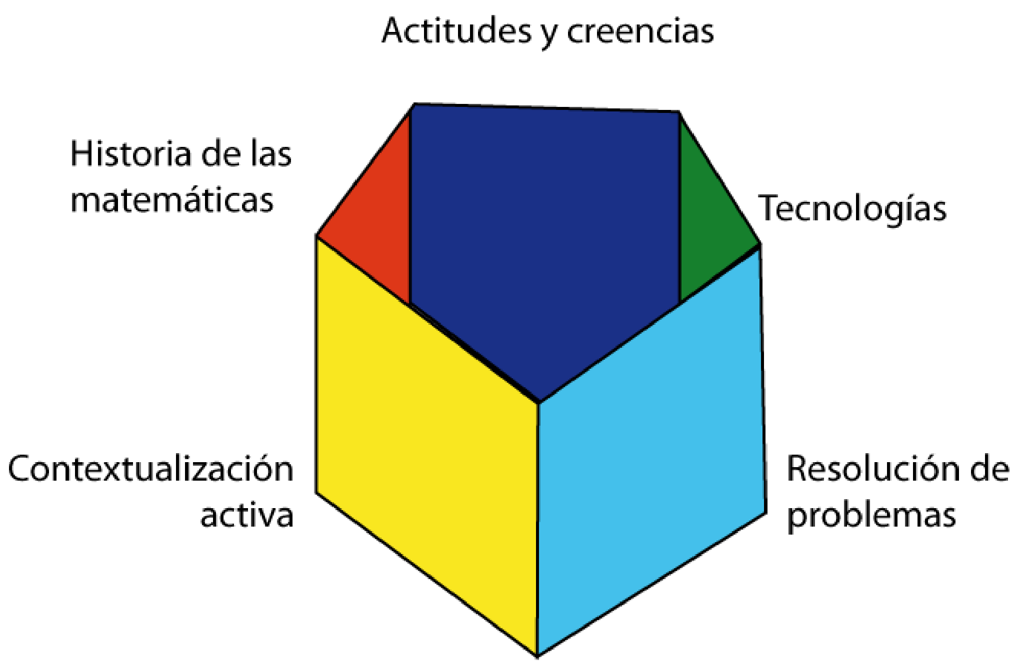
PROGRAMAS DE ESTUDIO

MATEMÁTICAS

- **Documento Curricular para primaria**



PROGRAMAS DE ESTUDIO

MATEMÁTICAS

Contenidos

Introducción

Este documento contiene diversas indicaciones para la implementación del currículo escolar de matemáticas; está estrechamente asociado a los programas de estudio en lo que se refiere a su marco teórico así como a la organización de los mismos por medio de áreas matemáticas y procesos matemáticos.

En cada ciclo educativo se encuentran indicaciones de mediación pedagógica en cada una de las cinco áreas matemáticas con las siguientes subsecciones:

- INDICACIONES METODOLÓGICAS Y DE GESTIÓN
- USO DE TECNOLOGÍAS
- PROBLEMAS Y SITUACIONES DIDÁCTICAS
- USO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
- ELEMENTOS SOBRE EVALUACIÓN DE PROBLEMAS Y PROYECTOS

Las indicaciones de método y gestión materializan algunas de las indicaciones generales que se consignan en la segunda parte de los programas: Descripción *e indicaciones puntuales*. También, estas amplían y complementan las "indicaciones puntuales" que acompañan los contenidos curriculares en su tercera parte. En el apartado de *Recursos* se brindan breves sugerencias de los recursos que se pueden usar y en el de *Procesos* se mencionan aquellos procesos matemáticos que ocupan mayor relevancia en el ciclo y área considerados.

Uso de la tecnología explica los significados (sentido y fronteras) del uso de estas herramientas en cada ciclo, así como ejemplos representativos que pueden mostrar la manera de introducirlos.

En la subsección de *Problemas y situaciones didácticas* se enuncian y resuelven situaciones -problema para cada año lectivo, en tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. Para diferenciar dichos niveles, se muestra a continuación la simbología empleada:

Nivel de complejidad	**Símbolo**
Reproducción	✇
Conexión	☯
Reflexión	🕘

Estos problemas son ejemplos para comprender mejor el significado de estos tres niveles. Las soluciones buscan mostrar con precisión una forma en la que se pueden resolver los mismos así como aportar algunas sugerencias útiles para el docente.

Uso de historia de las matemáticas ofrece ejemplos y sugerencias; en algunos casos se desarrollan con detalle tópicos históricos que se han mencionado puntualmente en los programas.

Las *Indicaciones sobre evaluación de problemas y proyectos* buscan aportar criterios a tomar en cuenta. No son prescripciones, solamente recomendaciones sistematizadas.

También, al final, se incluye en este documento una colección de referencias en línea que pueden apoyar diferentes aspectos de la práctica docente relacionados con los programas.

Este documento responde a la perspectiva que poseen los programas de matemáticas de una fuerte orientación hacia la acción de aula y a la labor del docente.

Primer ciclo

Primer ciclo, Números

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

La metodología utilizada en la enseñanza y aprendizaje de esta área es fundamental, pues los conceptos de números ocupan un porcentaje importante en este ciclo.

El papel de los algoritmos, principalmente en las operaciones básicas, es fundamental, pues el cálculo de estos es permanente durante toda la primaria e inclusive la secundaria.

En la actualidad los niños están rodeados de información que se recibe de los medios de comunicación y los videojuegos. Mucha de esta información está dada en números que superan las 4 cifras. Por esto se hace necesario en este ciclo la introducción de los números menores 1 000 000.

Métodos

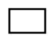
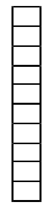
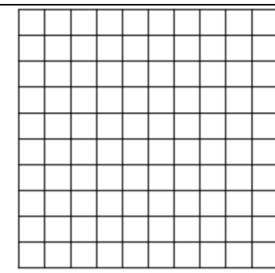
1. A lo largo del ciclo, los conceptos y habilidades de *Números* deben abordarse en estrecha relación con la resolución de situaciones-problema que le permiten al estudiante deducir el concepto que se quiere enseñar.

2. En el Primer ciclo, el uso del juego como metodología enriquece el interés del estudiante por aprender. Juegos como: "la papa caliente", "el barco se hunde", "ensalada de frutas" permiten introducir conceptos matemáticos de una manera agradable y significativa.

3. El uso de material recortable, el ábaco, periódicos, revistas se pueden utilizar como recurso para diferentes juegos, concursos de adivinanzas, dramatizaciones.

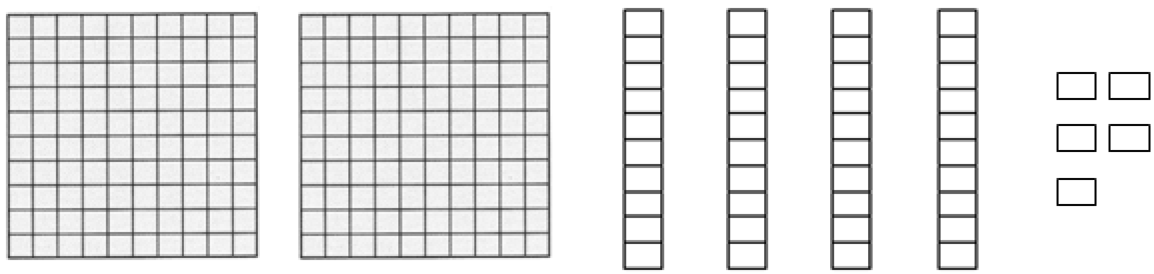
4. Se puede solicitar recortes de noticias que contengan números para introducir su nomenclatura y utilidad en los diferentes años.

5. Para la enseñanza de una o varias habilidades, se pueden utilizar diferentes metodologías. Por ejemplo, para la enseñanza de la habilidad "Aplicar los conceptos de centena, decena, unidades y sus relaciones", se propone utilizar material recortable en bloques de base 10, como los que se muestran a continuación:

Unidad	Decena	Centena
		

Con este material se pueden resolver ejercicios como los siguientes:

a. Determine el número representado a continuación



b. Con el uso de bloques forme las siguientes cantidades

  b.1. 234

  b.2. 501

  b.3 299.

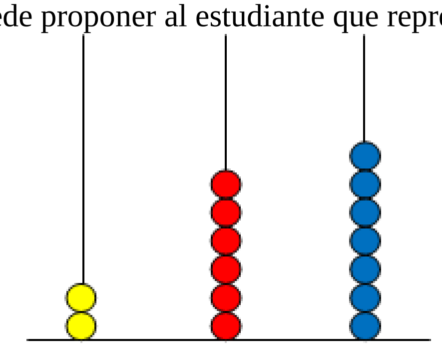
c. Resuelva las siguientes sumas, utilizando bloques

  c.1. 326 + 152

  c.2. 225 + 138

  c.3. 498 + 151

Sin embargo, esa misma habilidad se puede desarrollar utilizando un ábaco vertical físico o dibujado. Por ejemplo, se puede proponer al estudiante que represente el número 267 así:

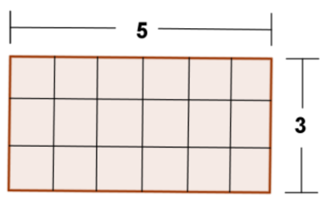
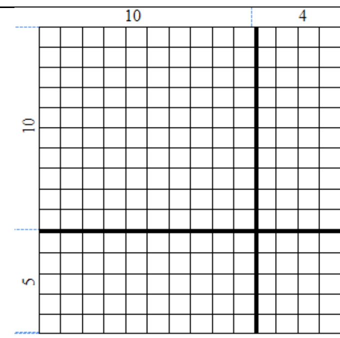


Así, puede deducir cómo se representarían los números 364, 953, 29, 305, 700. También se puede aprovechar el material para desarrollar las habilidades de suma y resta de números naturales.

6. El cálculo mental es fundamental en esta etapa (tablas de suma, sumar 2, sumar 10, sumar 9, etc.) y debe realizarse en forma de juegos: tirando una bola, con naipes, etc.

7. El aprendizaje de las tablas de multiplicación se inicia en 2° Año y debe ser estimulado de forma constante y lúdica en este ciclo: dominós, canciones, juegos de naipes, etc.

8. Para la multiplicación, es importante que el alumno pueda visualizar la operación. El uso de rectángulos es una herramienta simple que le permitirá entender por qué la multiplicación es más rápida que el conteo de cuadritos o la suma de estos.
   Por ejemplo:

	
$5 \times 3 = 15$	$14 \times 15 = 100 + 40 + 50 + 20 = 210$

9. Para trabajar el tema de los números ordinales, la metodología debe basarse en la construcción de los nombres que llevan estos números. Es importante acotar aquí que los términos onceavo, doceavo y treceavo están mal empleados, pues según la Real Academia Española, onceavo es una de las once partes en que se divide un todo. Esta definición es similar para doceavo y treceavo.

Gestión

Es necesario que la introducción de los conceptos inicie con una situación problema que puede servir como motivación y como medio de deducción de nuevos conocimientos. La idea es que bajo la guía activa del docente, los estudiantes puedan discutir acerca del problema o situación dado y, finalmente, el docente realice el proceso de institucionalización de los conocimientos que se logren adquirir por medio de la actividad.

Un esquema del plan de lección en el que se van a introducir nuevos conceptos podría ser: planteamiento de una actividad o situación problema, aportes de los estudiantes en torno a la situación o problema planteado, institucionalización del conocimiento, reforzamiento del conocimiento mediante resolución de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes.

Para la formulación de situaciones-problema el docente debe tener cuidado que los datos que se brinden y la respuesta sean reales.

Recursos

Como se explicó anteriormente, algunos recursos que se pueden utilizar son: ábaco, ábaco vertical, material recortable de bloques de base 10, calendario, línea numérica, odómetro, entre otros.

Con respecto al ábaco vertical, como es de fácil construcción se puede proponer como un proyecto que ellos realicen uno de estos ábacos con diferentes materiales y si cada estudiante tiene su respectivo ábaco, se aprovecharía al máximo el recurso en diferentes momentos y habilidades.

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Identifica definiciones de manera sencilla.
- Usa el método de resolución de problemas.
- Comunica sus resultados y métodos en forma apropiada.
- Establece conexiones entre números y cantidades.
- Utiliza distintas representaciones numéricas según las situaciones.

Uso de tecnologías

Significados y usos

Para ir introduciendo al niño en el ambiente de la tecnología, en este Primer ciclo se puede ir incorporándola, principalmente el Internet, pues aquí se alojan miles de páginas educativas y llamativas para los estudiantes.

Como bien se ha descrito en algunas de las áreas de las matemáticas, en este Primer ciclo una de las metodologías que más se debe utilizar es el juego. Por otro lado, la visualización en los niños les permite crear imágenes sobre determinada temática. Estos dos aspectos (el juego y la visualización), junto con otros más, le dan al Internet un uso primordial en este ciclo.

Distintos profesionales o empresas han creado sitios web donde permite al usuario repasar algún concepto o resolver actividades que lo llevan a la creación del mismo concepto.

Ejemplos representativos

A manera de demostración, se presenta un pequeño tutorial de cómo se puede buscar un recurso en Internet para cualquiera de los años escolares:

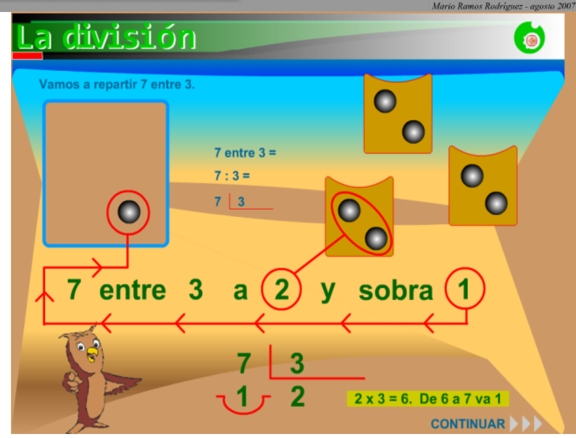
Se accede a un buscador puede ser www.google.com

Se introduce en la barra de búsqueda el tema deseado. Por ejemplo "recursos en matemáticas + flash" El término "flash" se agrega, pues los recursos gráficos más bonitos están hechos en este programa y los resultados son sitios que utilizan flash en las diferentes actividades.

En este punto se debe escoger el sitio web que más sirva. Si se escoge, por ejemplo la primera opción, se obtiene el sitio web donde se brinda información sobre recursos y sus respectivas direcciones electrónicas.

Si se escoge la primera dirección electrónica nos direcciona a un sitio web donde permite al estudiante aprender sobre el concepto de la división, así como ejercicios para resolver.

En la derecha se puede observar el recurso Flash que intenta explicar a través de ejemplos con dibujos, el concepto de la división.



Los sitios web ofrecidos pueden desactualizarse rápidamente o dejar de existir, por lo que en el uso de Internet, lo más importante es que el docente investigue en buscadores, diferentes actividades para el tema que está desarrollando.

Por otro lado, la incorporación del Internet en la enseñanza de la matemática en este ciclo, permite crear una cultura de uso adecuado del ciberespacio y ayuda a los estudiantes a identificar y escoger información adecuada para sus propósitos.

Problemas y situaciones didácticas

En este ciclo, las situaciones o problemas a tratar en el área de *Números*, tenderán a la adquisición de conceptos a nivel intuitivo. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del año corresponde a reproducción (✇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (◷).

1° Año

✇ Si Andrés tiene 23 bolinchas y Sebastián tiene 45. ¿Cuál de los dos tiene más bolinchas? ¿Cuántas tienen entre ambos?

Solución

Sabemos que 45 es mayor que 23 ($45 > 23$), entonces Sebastián tiene más bolinchas que Andrés.
Si sumamos las cantidades de bolinchas tendremos en total $23+45 = 68$ bolinchas.

☯ Calcule la cantidad total de

Solución

$25 + 25 + 25 + 10 + 5 = 90$

◷ En una juguetería, en una semana de promoción se vendieron las siguientes cantidades de muñecas:

Día	Cantidad de muñecas
Lunes	4
Martes	9
Miércoles	13
Jueves	9
Viernes	13
Sábado	16

Si se sabe que en toda la semana se vendieron 84 muñecas, ¿Cuántas muñecas se vendieron el domingo?

Solución

Si se suman las que se vendieron de lunes a sábado, se tendrían

$$4 + 9 + 13 + 9 + 13 + 16 = 64$$

Para saber la cantidad de muñecas que se vendieron el domingo, se debe buscar cuántas hacen falta para llegar al total de 84 o restar del total de muñecas que se vendió en la semana, la cantidad de muñecas que se vendió de lunes y sábado:

$$64 + ? = 84$$

o bien

$$84 - 64 = 20$$

El domingo se vendieron 20 muñecas.

Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de confianza en la utilidad de la matemática.

2° Año

- Complete la siguiente tabla de multiplicación

×	1	2	3	4	5
1	1	2		4	
2					10
3	3	6			
4	4		12	16	20
5		10			

Solución

La tabla se completa de la forma siguietne:

×	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

☯ Si Melania tiene ¢800 y va al mercado con su mamá y se compra 2 mandarinas que valen ¢150 cada una. ¿Cuánto dinero le quedó a Melania?

Solución

Melania compró 2 mandarinas a ¢150 cada una, que en total le costaron:

$$2 \times 150 = ¢300$$

Ella tenía ¢800 a los que hay que restarle ¢300 que gastó:

$$800 - 300 = ¢500$$

lo cual representa la cantidad de dinero que le quedó.

Analice y determine cuántas cifras tiene el resultado de las siguientes operaciones

Operación	Cantidad de cifras
$21+87$	
$222-123$	
3×5	
$865-112$	

Solución

El cuadro que completa las respuestas del problema anterior se muestra a continuación:

Operación	Cantidad de cifras
$21+87$	3
$222-123$	3
3×5	2
$865-112$	3

Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de autoestima en relación con el dominio de la matemática.

3° Año

☹ La entrada al cine tiene un costo de ₡2 400, las palomitas cuestan ₡1 100 y un refresco cuesta ₡800. Los miércoles tienen una promoción que incluye: entrada, palomitas y refresco por un costo de ₡3 700. ¿Cuánto se ahorra una persona si aprovecha la oferta de los miércoles?

Solución

Un día que no es miércoles habría que sumar el costo de la entrada, las palomitas y el refresco para saber el total

$$2\ 400 + 1\ 100 + 800 = ₡4\ 300$$

La diferencia entre el gasto un día con costo normal y un miércoles nos daría el ahorro por persona por eso se efectúa una resta entre esos valores.

$$4\ 300 - 3\ 700 = ₡600$$

☯ En una tienda de electrodomésticos, venden una pantalla plana de 32 pulgadas a ₡324 000 a contado. Sin embargo, si se desea comprar la pantalla a crédito el comprador debe pagar ₡43 750 por mes durante un año. ¿Cuánto debe de pagar el comprador si se compra a crédito? ¿Cuánto es la diferencia de precio entre comprarla a contado y a crédito?

Solución

Si se compra a crédito, el comprador debe pagar por año

$$₡43\ 750 \times 12 = ₡525\ 000$$

Así, el comprador debe pagar ₡525 000 si se lleva la pantalla a crédito. La diferencia corresponde a

$$₡525\ 000 - ₡324\ 000 = ₡201\ 000$$

Considere la información de la siguiente tabla:

Istmo Centroamericano: casos de personas con sida, según país (2003 y 2005)		
País	**2003**	**2005**
Costa Rica	6 400	7 400
El Salvador	34 000	36 000
Guatemala	55 000	61 000
Honduras	58 000	68 000
Nicaragua	5 900	7 300
Panamá	16 000	17 000

Fuente: Estado de la Región en Desarrollo Humano Sostenible, 2008

¿En qué año hubo más personas con sida en el Istmo Centroamericano? ¿Cuál es la diferencia?

Solución

Para obtener el total de casos por año se deben sumar los datos de cada país.

2003	$6\ 400 + 34\ 000 + 55\ 000 + 58\ 000 + 5\ 900 + 16\ 000 = 175\ 300$
2005	$7\ 400 + 36\ 000 + 61\ 000 + 68\ 000 + 7\ 300 + 17\ 000 = 196\ 700$

Hubo más casos en el año 2005. La diferencia es de

$$196\ 700 - 175\ 300 = 21\ 400 \text{ casos.}$$

Los tres problemas anteriores deben apoyar las actitudes de confianza en la utilidad de la matemática y la participación activa y colaborativa por parte del estudiante, los cuales podrían realizar una representación (simulación) de la situación anterior.

Comentarios sobre los problemas

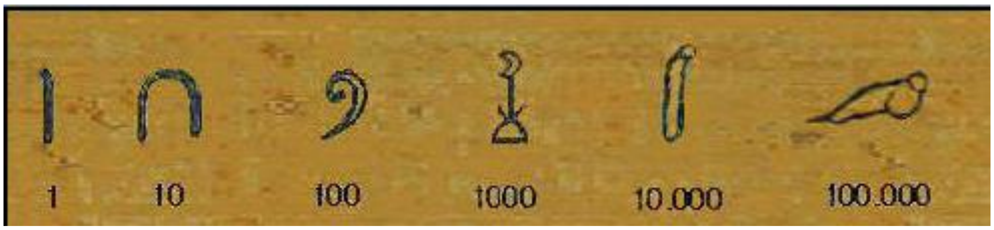
Muchos problemas en el área de *Números* están asociados particularmente al nivel de complejidad de conexión, pues esta área es muy amplia y es natural utilizar números y sus operaciones para la resolución de situaciones en otras áreas de la matemática.

En el problema de reflexión del 3$^{\text{er}}$ Año, la información de la tabla puede aprovecharse para otras preguntas de análisis. Otros ejemplos similares se pueden encontrar en el documento: *El aterrizaje de los números* del programa del Estado de la Nación.

Uso de historia de las matemáticas

Anotaciones Históricas

En este Primer ciclo, se puede trabajar a manera de juego algunos ejercicios donde se utilicen varios sistemas de numeración para la representación de números. Por ejemplo, el sistema de numeración egipcio, que utilizaba jeroglíficos para representar los números en base diez sin conocimiento del cero:



Fuente: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html#E

Con esta información se les dice a los estudiantes que representen los números 64, 215, 3 804, 234 562.

Este tipo de actividades busca introducir la historia de las matemáticas, pero además concientizar a los estudiantes sobre la importancia de nuestro sistema de numeración. Se puede aprovechar esta actividad en los tres años de este ciclo, considerando los topes que se manejan en cada año.

Se puede dejar un pequeño trabajo de investigación donde se indague sobre otros sistemas de numeración. Se debe tener cuidado pues algunos de estos sistemas no son en base diez y pueden confundir al estudiante al representar números.

Primer Ciclo, Geometría

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

En un primer momento, los contenidos y habilidades geométricas en este ciclo deben abordarse en estrecha relación con lo concreto, valiéndose tanto del entorno como de material preparado especialmente para la enseñanza de los conceptos o el desarrollo de las habilidades y procesos. Lo anterior implica actividades tales como el recorte de figuras en papel o cartón o juegos de observación o de otro tipo con una intencionalidad geométrica. En una segunda etapa los estudiantes podrán trazar figuras a mano alzada o utilizando instrumentos de geometría.

Todo esto tendrá que llevar a la abstracción de los conceptos involucrados y el reconocimiento de diversos elementos presentes en las figuras y la posibilidad de clasificarlas.

Los contenidos geométricos propuestos para este ciclo son sumamente básicos, pero se pretende que al finalizar el mismo, los estudiantes no tengan dificultades al identificar las figuras, saber que están presentes en diversas partes, realizar trazados sencillos y tener una noción intuitiva de que las figuras planas tienen componentes identificables como puntos y segmentos de líneas y que las figuras tridimensionales tienen elementos que se pueden identificar como puntos, líneas y figuras planas.

Métodos

1. En el aspecto metodológico se sugieren actividades que lleven a la reproducción a partir de un modelo dado o a construir figuras con base en datos brindados oralmente o por escrito.

2. En cuanto a la reproducción de modelos se sugiere, por ejemplo, presentar un cuerpo geométrico y solicitar que los alumnos lo reproduzcan utilizando plastilina o, dada una figura geométrica recortada en cartón, pedirles que tracen una semejante.

3. En cuanto a la construcción de figuras, el maestro puede pedir que se dibuje una figura que cumpla con una o varias características.

4. El uso de materiales impresos tales como periódicos o revistas pueden ser un valioso recurso. En fotografías o dibujos que aparecen en ellos, se pueden reconocer figuras geométricas, visualizar el paralelismo o la perpendicularidad, ángulos en general, etc.

5. Es importante que el estudiante redacte su argumentación utilizando el lenguaje natural y, eventualmente, lenguaje matemático y simbología.

Gestión

Es deseable que la introducción de los conceptos inicie con una situación problema que puede servir como motivación y como medio de acceder a nuevos conocimientos. La idea es que bajo la guía activa del docente los niños y niñas puedan discutir acerca del problema o situación dado y, finalmente, el docente realice el proceso de institucionalización de los conocimientos que a través de las actividades logren adquirirse.

En su planificación, el educador debe dar oportunidad a una amplia experimentación por parte de los estudiantes. Esto implica la necesidad de considerar aspectos como: recursos a utilizar, tiempo de las actividades, participación de los estudiantes en el proceso de institucionalización, entre otros.

Recursos

Algunos recursos que se pueden utilizar: tangrama, doblado de papel, papel cuadriculado, cubo soma, geoplano, materiales impresos (periódicos, revistas, volantes de propaganda).

Procesos

Los procesos en los cuales se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Justificación de procedimientos seguidos de manera verbal o pictórica.
- Usar modelos sencillos de situaciones.
- Explicación de resultados de manera oral y pictórica.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo tenderán a la adquisición de conceptos a nivel intuitivo, el reconocimiento y trazado de figuras. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada año, de cada nivel. El primer problema del grado corresponde a reproducción (⚇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (◷).

1° Año

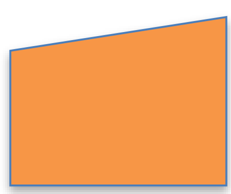
⚇ En la fotografía adjunta aparecen 7 niños. El niño de camisa amarilla se llama Roberto, ¿cuántos niños y niñas se encuentran a la derecha de Roberto?, ¿cuántos a su izquierda?, ¿cuántos delante?, ¿cuántos detrás?

Solución

A la derecha de Roberto se encuentra una niña y a su izquierda un niño. Delante de él no hay niños y detrás hay 4 niños.

Este problema puede servir para apoyar la actitud de participación activa y colaborativa.

☯ Reproduzca la siguiente figura en un papel cuadriculado.



Sugerencia

Observe que los ángulos inferiores son rectos; dése primero las medidas de los dos lados (izquierdo y derecho) para que luego solo deba unir los puntos.

◷ Se presenta a los alumnos un cuerpo sólido con caras planas numeradas y se pregunta, si pintamos con témpera la cara número 1 y la apoyamos en un papel, ¿qué figura se forma en el papel? Lo mismo para las diferentes caras.

Sugerencia

Se forma un polígono que conserva la forma de la cara pintada en cada caso.

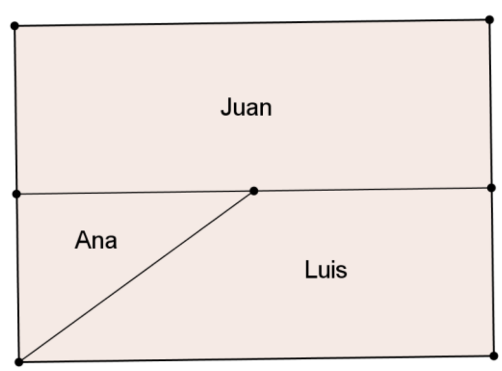
2° Año

✇ En la siguiente ilustración repinte de color rojo dos líneas paralelas. Repinte en verde una línea y otra perpendicular a ella. Repinte en azul un rectángulo.

Sugerencia

Recuerde que dos líneas son paralelas si no se intersecan y que dos líneas son perpendiculares si forman en su intersección ángulos rectos.

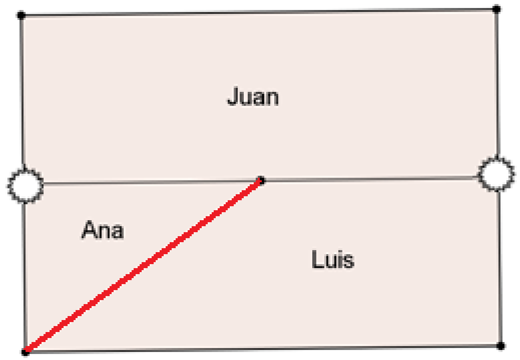
☯ Tres amigos, Ana, Juan y Luis tienen cada uno una parcela de terreno. La figura adjunta representa esas parcelas vistas desde arriba. Juan quiere poner un poste en cada vértice de su parcela que sea común a alguno de los vértices de las parcelas de sus amigos. Señale



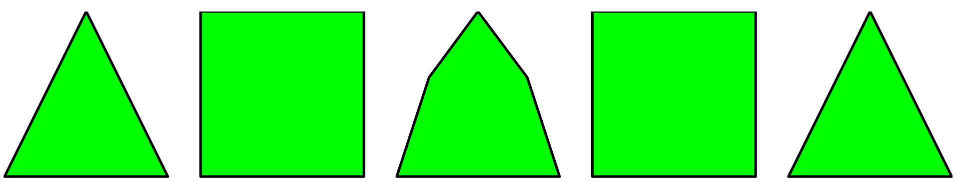
los puntos donde irían esos postes. Ana quiere sembrar amapolas a lo largo del lado que comparte con Luis, señale dónde sembrará las amapolas.

Sugerencia

Considere la parcela de Juan (arriba), en ella se destacan 4 puntos de intersecciones, las dos superiores no son comunes con las otras parcelas por ello se deben pintar los dos vértices inferiores. Se destaca con rojo el lado que Ana pretende sembrar con amapolas una cerca.



Cierta serie de figuras consta de 12 figuras. Las primeras cinco son las siguientes:



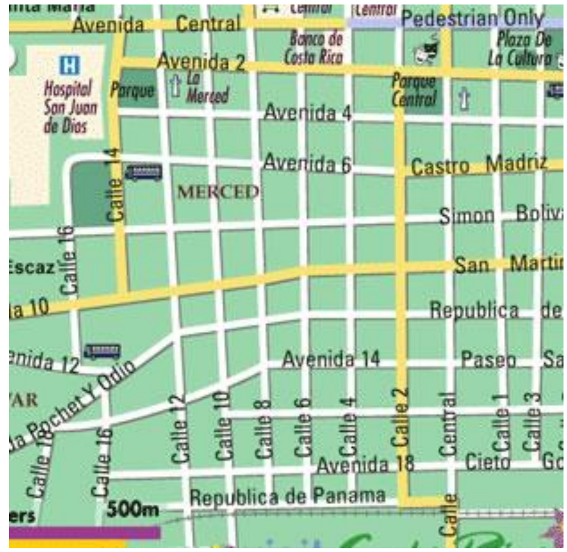
¿Cuál es la que sigue?, ¿cuál es la número 10?, ¿cuál es la última?

Solución

En todos los casos la figura correspondiente es un cuadrado.

3° Año

♲ El siguiente es un plano de parte de la ciudad de San José. Pinte en rojo calles que formen ángulo recto, en azul calles que formen ángulo agudo y en verde calles que formen ángulo obtuso.



Solución

El mapa siguiente muestra una alternativa de respuesta

Sugerencia

Recuerde que el ángulo recto es el que mide 90°, los ángulos agudos miden más de 0° y menos de 90°, y los ángulos obtusos miden más de 90° y menos de 180°. Se sugiere a los estudiantes el uso correcto de la escuadra.

Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de confianza en la utilidad de la matemática.

☯ Una caja mide 13 cm. de largo, 8 cm. de ancho y 7 cm. de alto. Se quiere poner en ella chocolates de forma esférica que tiene 3 cm. de diámetro, ¿cuál es el número máximo de chocolates que caben en la caja?

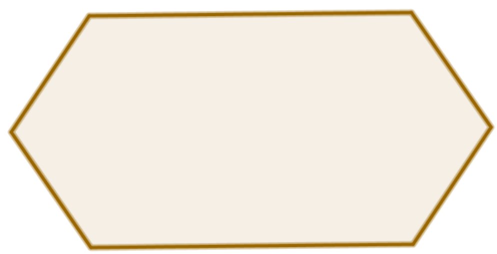
Solución

Considere la base de 13 cm., en ella cabe 4 veces el diámetro de 3 cm.

En el ancho de 8 cm., cabe 2 veces el diámetro.
En la altura de 7 cm., cabe 2 veces el diámetro.

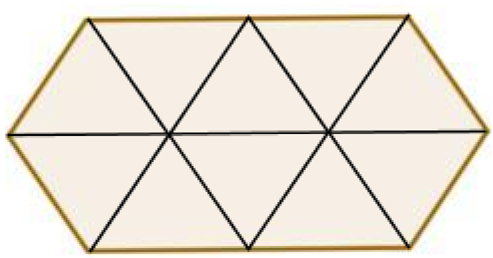
Así el total sería 4×2×2=16 chocolates.

🕘 María posee un terreno que tiene la forma dada en la figura. María quiere repartir el terreno entre sus diez hijos de modo que todos tengan la misma cantidad de terreno, ¿cuál figura geométrica es más útil para dividir el terreno? Ayúdele a María a dividir el terreno.



Solución

Por no ser una figura rectangular es más útil dividir en triángulos.



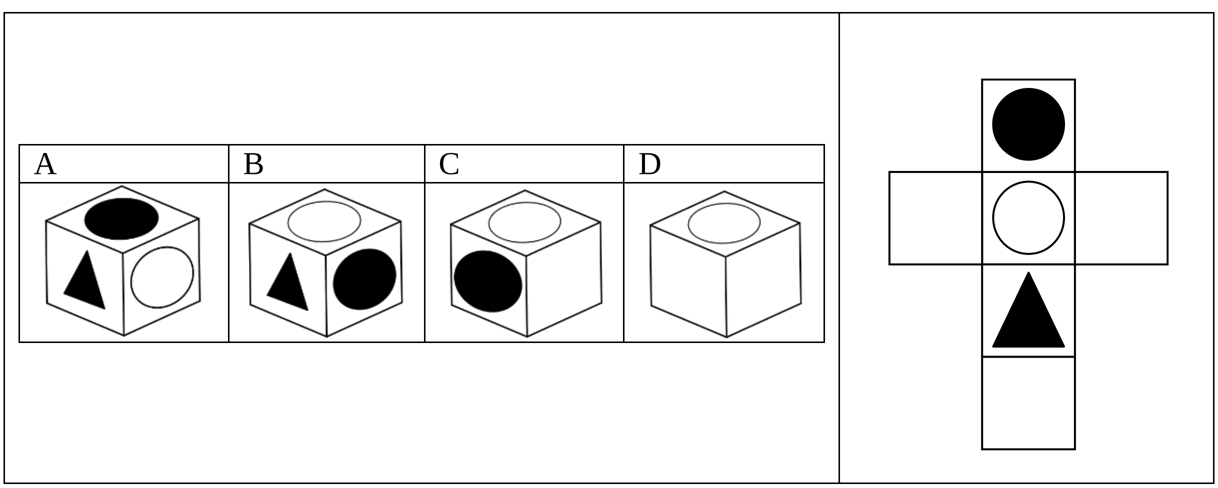
El siguiente problema puede ser utilizado para activar los procesos de resolución de problemas y conexión.

☯ Solicitar a los estudiantes que dado un cierto terreno a disposición (la forma del mismo la decide el educador), el alumno realice una distribución apropiada para un jardín. Los resultados deben ser expuestos por el estudiante al resto del grupo, justificando dimensiones utilizadas, especies y cantidad de plantas. Dicha exposición puede hacerse con maquetas o dibujos.

Observaciones: El alumno se esforzará por hacer una repartición equilibrada del terreno, en algunos casos las estrategias serán contrapuestas y el docente debe aprovechar para introducir conceptos matemáticos nuevos, tales como: medidas, formas geométricas, fracciones, etc. Es un momento oportuno para introducir conexiones de la disciplina con la conservación ambiental, la ecología, el reciclaje, arquitectura, agricultura, etc.

El siguiente problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de participación activa y colaborativa.

Dada la siguiente figura de la derecha, se solicita a los estudiantes que la reproduzcan en una cartulina o en una hoja en blanco e identifique cuál de los siguientes cubos puede formarse con ella.



Se propone una segunda actividad al estudiante donde genere su propio cubo, con la decoración elegida por el propio alumno.

Solución

Las figuras A y B no se pueden formar pues en la figura de la derecha están consecutivas las formas. La figura D no se puede formar pues el círculo blanco debe tener a un costado el otro círculo y al otro el triángulo pero en este cubo alguno debería aparecer en la vista lateral. La figura C si se puede formar dejando al triángulo escondido en el costado de atrás.

Se propone una segunda actividad al estudiante donde genere su propio cubo, con la decoración elegida por el propio alumno.

Comentarios sobre los problemas

Los problemas propuestos pueden servir como reforzamiento o para introducir conceptos. Por ejemplo el primer problema del 3er Año puede servir como actividad para introducir los conceptos de ángulo agudo, recto y obtuso y la relación existente entre estos tres tipos de ángulos.

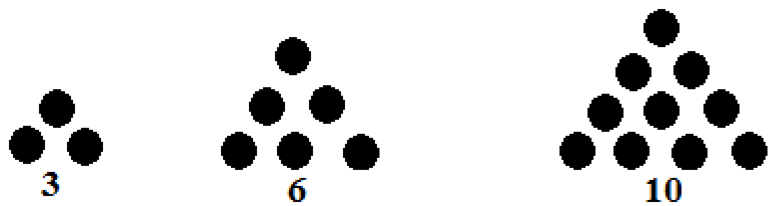
Por otra parte, algunos problemas pueden ser de diversos niveles de complejidad dependiendo de las preguntas que se realicen o el enfoque que se utilice. Por ejemplo, el tercer problema del 1er año, que está propuesto como de nivel de reflexión, puede ser de nivel de conexión o de reproducción si en lugar de preguntar en abstracto por la figura que quedaría impresa en el papel, se pide que lleven a cabo la acción; es decir se pide que en realidad pinten una cara del sólido y la apoyen sobre el papel, en este caso solo tendrán que observar la marca en el papel y conocer el nombre de la figura.

Uso de historia de las matemáticas

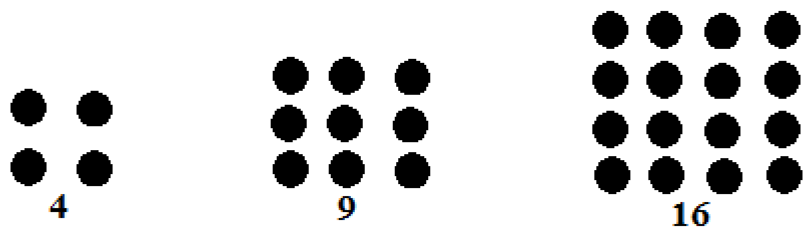
Los Números figurados

Los primeros pitagóricos se interesaron por la representación gráfica de los números, particularmente a través de lo que se conoce como números figurados. Esto es, la representación de números utilizando puntos o piedras. En general se presentan los números como triangulares, cuadrados, etc.

Los números 3, 6 y 10 son triangulares:



Los números 4, 9 y 16 son cuadrados:



Algunas propiedades de los números pueden comprenderse fácilmente utilizando los números figurados.

El estudio más completo de estos números lo dio el griego Nicómaco de Gerasa alrededor del año 100 d.C. También Diofanto escribió un tratado sobre números poligonales.

La historia del Tangrama

El Tangrama llamado en chino “Tchi'i Tchi'iao pan” (La tableta de la sabiduría), es un juego de reflexión formado por siete figuras. La meta del juego es reproducir un modelo dado más rápidamente que su compañero.

Su historia es muy antigua. Remonta al tiempo de los emperadores. Un emperador Chino admiraba una magnífica losa de cerámica. La dejo caer accidentalmente. La pieza cuadrada se quebró en siete pedazos. Trato de reconstruirla pero nunca pudo lograrlo. En su lugar obtuvo múltiples figuras y así nació el Tangrama.

Primer ciclo, Medidas

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

Los contenidos y habilidades en esta área deben abordarse en estrecha relación con lo concreto, valiéndose tanto del entorno como de material preparado especialmente para la enseñanza de los conceptos o el desarrollo de las habilidades y procesos. Lo anterior implica actividades tales como la manipulación de objetos, la observación, el conteo y el uso de algunos instrumentos.

La comparación es de suma importancia en la adquisición del concepto de medida de diferentes tipos, por lo que se deberá llevar a cabo actividades que la propicien.

Se pretende que al finalizar este ciclo los estudiantes tengan una idea bastante clara de lo que es la medición y puedan realizar, estimar y comparar mediciones.

Se debe tener presente que en medición hay implicadas dos operaciones de orden psicológico, muy importantes: conservación de la cantidad y transitividad entre cantidades.

Métodos

1. Para este ciclo, las actividades que se proponen en esta área tienen que estar relacionadas con acciones cotidianas o situaciones del entorno y con el uso de diversos materiales. *Medidas* está estrechamente ligada con la utilidad de las matemáticas y esto debe evidenciarse a través de situaciones en la que se usen datos y mediciones realistas.

2. Es importante tener presente que los niños pueden confundir algunos atributos de los objetos con atributos medibles que no necesariamente están relacionados. Por ejemplo, al observar dos objetos de diferente tamaño los niños tienden a pensar que el más grande tiene más peso. Las actividades que se programen deberán tener esto en cuenta con el propósito de ir eliminando estas dificultades.

3. Actividades de comparación están estrechamente ligadas con la operación de transitividad. Aquí se sugiere, por ejemplo, ordenar objetos según su peso o según su tamaño o la medición que se esté considerando.

4. Algunas actividades tienen que enfatizar la conservación de la cantidad. Por ejemplo, medir un cordel, luego partirlo en dos o tres pedazos, medir cada uno de ellos y sumar las medidas permite ver que el cordel original y los pedazos juntos tienen la misma longitud. La cantidad de agua se conserva cuando se pasa de un envase a otro, aunque la forma y el tamaño de los envases sean diferentes.

5. El estudiante deberá utilizar el lenguaje natural y eventualmente el lenguaje matemático en sus explicaciones.

Gestión

Es muy importante planificar el espacio destinado a la experimentación por parte de los estudiantes, el uso de objetos y la institucionalización de los conceptos.

En este ciclo, el educador requiere preparar muchos materiales manipulables en esta área.

Recursos

Algunos recursos que se pueden utilizar: cartulina, palillos, diversos objetos (piedras, frutas, etc.), instrumentos como pesas y reloj analógico.

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

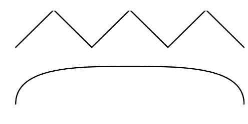
- Justificación de procedimientos en forma oral y escrita.
- Uso de la resolución de problemas.
- Comunicación pública de resultados en forma oral y pictórica.
- Conexión especial entre la matemática y otras materias.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo tenderán a la adquisición de conceptos a nivel intuitivo, mediciones sencillas y estimación de medidas. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del año corresponde a reproducción (✇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (🕘).

1er Año

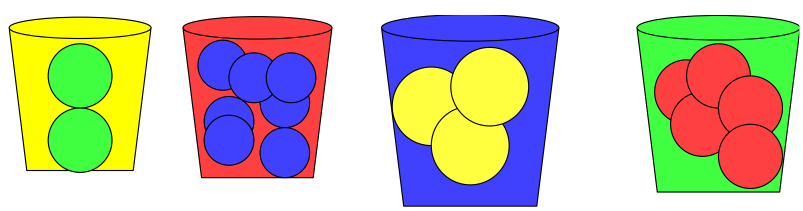
✇ ¿Cuál de los trazos es más largo?, ¿cuál es más corto?



Solución

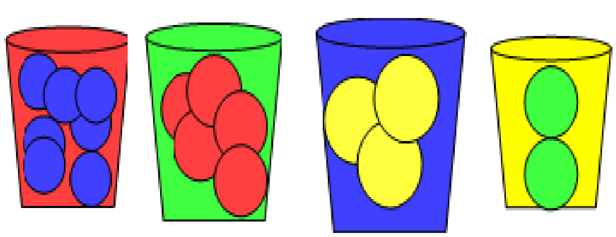
El trazo en picos es más largo. El trazo en arco es más corto. Se sugiere el uso de un cordel para verificar y comparar.

☯ Ordene los siguientes recipientes del que contiene más bolitas al que contiene menos:



Solución

La misma se representa en la figura siguiente



🕘 María irá mañana a Liberia, Andrés fue ayer a Liberia, Roberto fue a Liberia antes que María pero después que Andrés. ¿Cuándo fue Roberto a Liberia?

Solución

Roberto fue a Liberia hoy.

2° Año

⚇ Teresa tiene 8 monedas de ¢25 y una moneda de ¢50; Roberto tiene 6 monedas de ¢25 y dos monedas de ¢50, ¿quién tiene más dinero?

Solución

Se detalla a continuación los totales de cada uno

Teresa	$8 \times 25 + 50 =$¢250
Roberto	$6 \times 25 + 2 \times 50 =$¢$250$

Ambos tienen la misma cantidad.

☯ Luis necesita cuatro pedazos de cordel de 3 m. cada uno. El vendedor le dice que tiene cordel de dos tipos; uno mide 10 m. de largo y cuesta ¢1 500 y el otro mide 15 m. de largo y cuesta ¢2 700, ¿cuál cordel le recomendaría comprar?, ¿por qué?

Solución

Luis necesita en total $4\times 3 = 12$ metros de cordel. Si compra dos cordeles de 10 metros gasta ¢3 000. Si compra el de 15 metros gasta ¢2 700. Se le recomienda comprar el de 15 metros pues le sale más barato.

◷ Se tienen tres recipientes uno amarillo, otro verde y otro azul. El amarillo se llena de agua y se vacía en el verde, se vuelve a llenar el amarillo y se vacía en el verde; el recipiente verde se llena y se derrama un poco de agua. Luego se vacía el verde en el azul y este se llena y se derrama un poco de agua; Finalmente se vacía el azul en el amarillo y este se llena y se derrama un poco de agua. ¿Cuál recipiente tiene más capacidad?, ¿por qué?

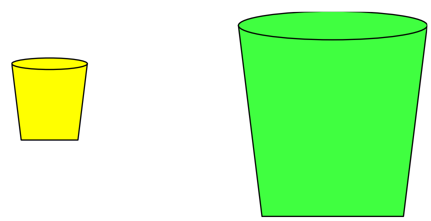
Solución

El recipiente amarillo es más pequeño que el verde pues no se regó el agua en la primera vaciada. El verde es más grande que el azul pues el agua se derramó. El azul es más grande que el amarillo pues se derramó el agua. El verde es más grande que el amarillo y el azul. Se sugiere hacer un cuadro para facilitar la búsqueda de la solución.

Estos tres problemas pueden ser utilizados para apoyar la actitud de confianza en la utilidad de las matemáticas.

3° Año

☉ El recipiente amarillo tiene una capacidad de 2 decilitros, se llena de agua 20 veces y cada vez se vacía en el recipiente verde hasta que este queda completamente lleno, ¿cuántos litros de capacidad tiene el recipiente verde?



Solución

Al recipiente verde le caben 4 litros, dado que $20 \times 2 = 40$ decilitros, lo cual equivale a 4 litros.

☯ Laura salió de su casa a las 7 de la mañana, caminó 10 minutos hasta la escuela, estuvo en la escuela 3 horas y 15 minutos y caminó de regreso a casa durante 10 minutos, ¿a qué hora regresó Laura a su casa?

Solución

Laura salió a las 7 am. A las 7:10 am estaba en la escuela y a las 10:25 am salió de ella. Dado que caminó durante 10 minutos, Laura llegó a su casa a las 10:35 am.

🕘 Luisa pintó una pared de su cuarto con rayas de colores, la altura de la pared es de 2m. y 40 cm. Pintó tres rayas amarillas de arriba hasta abajo de la pared, dos rayas rojas desde el piso hasta la mitad de la pared y dos rayas verdes desde la mitad de la pared hasta arriba. ¿Cuál es la longitud total en decímetros de las rayas que pintó Luisa?

Solución

Las rayas amarillas miden 2m y 40 cm, que son 24 decímetros, entonces $3 \times 24 = 72$ decímetros.

Las rayas verdes y rojas miden la mitad de 2m. 40. cm que serían 1m 20 cm que equivalen a 12 decímetros, entonces $2 \times 12 + 2 \times 12 = 48$ dm. La longitud total es de $72 + 48 = 120$ decímetros.

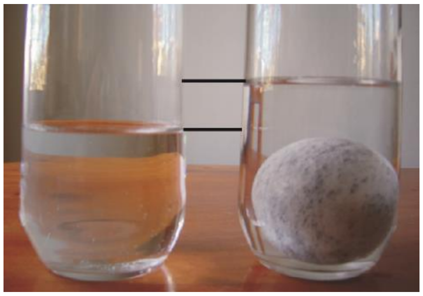
Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de perseverancia.

Uso de historia de las matemáticas

Anécdota: Arquímedes grita Eureka

Arquímedes de Siracusa vivió del año 287 al año 212 a. C. Fue un gran pensador y matemático e inventó varios artefactos.

Descubrió un principio que lleva su nombre que dice que si se sumerge un objeto en un líquido, entonces el volumen del objeto es igual al volumen del líquido que se desplaza al ser sumergido.



Se cuenta que cuando descubrió este principio, Arquímedes se encontraba en su tina bañándose y fue tal su alegría que salió desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡Eureka!, ¡Eureka!, que significa ¡lo encontré!

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema en el área de *Medidas*, los cuales recomiendan posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

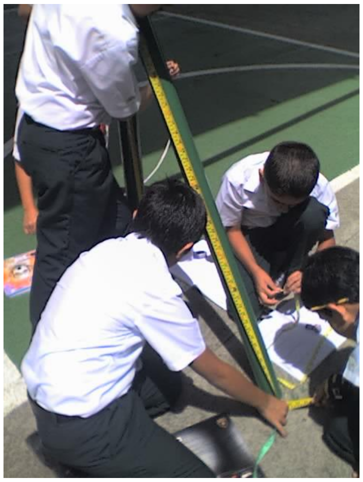
La escuela necesita un marco de fútbol para la cancha igual al que ya se tiene, pero se desconoce la cantidad en metros de tubo que se requiere comprar. ¿Cuántos metros de tubo se necesitan?

Modalidad	**Área**	**Año**	**Objetivo**
Problema	*Medidas*	3°	Realizar mediciones utilizando el metro y el centímetro. Establecer relaciones entre el metro y el centímetro.

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Se toma en consideración el trabajo en equipo y la participación de todos los miembros en el análisis de la estrategia a utilizar como de los instrumentos que requieren para obtener los datos necesarios.

- *Establecimiento de una estrategia:* Se evalúa la originalidad de cada equipo para aplicar una estrategia tomando en cuenta la factibilidad, conexión y belleza. Se puede evaluar también la conexión con geometría si los equipos relacionan la medida del perímetro como una estrategia de solución.



- *Desarrollo de la estrategia:* Evaluar el uso correcto de los instrumentos necesarios para la recolección de los datos, la interpretación correcta de las mediciones hechas, la unidad de medida utilizada y la unidad de medida solicitada en la pregunta cómo el proceso matemático necesario para realizar la conversión de una unidad de medida a otra.

- *Autoreflexión sobre la estrategia:* Se evalúa si la estrategia utilizada fue la más indicada, si hubo total acuerdo en el equipo o se omitieron opiniones importantes de alguno de los miembros que pudieron dar mayor eficacia al proceso utilizado.

- *Análisis de los resultados:* Se toma en consideración si los resultados obtenidos responden a la pregunta planteada además de la factibilidad.

- *Conclusión:* Se evalúa que la respuesta dada contenga los elementos necesarios que solucionan el problema planteado.

Situación problema

Dentro del aula los estudiantes montan diferentes puestos de ventas de comidas aplicando la creatividad. Cada grupo debe elegir entre una frutería, confitería o repostería. Se organiza el aula en pequeños puestos que cada grupo decora a su gusto y trae los materiales necesarios para organizar el negocio elegido (traen frutas, repostería, dulces, cajetas u otros) Según el puesto elegido, los estudiantes le asignan un precio a cada producto y los venden mientras que otros los compran utilizando dinero elaborado por ellos, ya que los alimentos y demás son donados por los estudiantes.

Modalidad	**Área**	**Año**	**Objetivo**
Proyecto	*Medidas*	2°	Aplicar el uso del dinero en una situación real

Aspectos a evaluar

- *Explorar y comprender la situación problema:* Se evalúa el trabajo en equipo y la participación de todos los miembros en la elaboración del puesto elegido. Se toma en consideración si los materiales presentados responden a las necesidades de la situación planteada.

- *Diseño de la estrategia que involucra la situación problema:* Se evalúa la organización del equipo para hacerle frente al problema y la creatividad para montar su puesto de manera que atraiga a los clientes. La originalidad para aplicar una estrategia que involucra los procesos matemáticos necesarios para identificar los totales y aplicar los vueltos correctamente.

- *Implementación de la estrategia:* Se evalúa el uso correcto de los procesos matemáticos, la originalidad y factibilidad de lograr una respuesta de manera ágil y correcta así como la utilización del cálculo mental en situaciones apropiadas. También, se evalúa la belleza en el registro de las operaciones requeridas en las ventas realizadas y la creatividad para atraer clientes a realizar compras en el puesto elegido.

- *Análisis de los resultados:* Se toma en consideración si la estrategia utilizada para realizar las ventas fue la más apropiada. Si hubo ganancias en cuanto al dinero obtenido por las ventas. Se evalúa además si el procedimiento para realizar los cálculos fue eficiente.

- *Comunicación de los resultados y conclusiones:* Para este ciclo se puede evaluar la comunicación de los resultados en forma oral, donde cada equipo de un breve informe de cuáles fueron las dificultades mayores que se les presentaron como también cuáles procesos le resultaron más fáciles y que se puede mejorar en caso de otra oportunidad de repetir el proyecto.

Primer Ciclo, Relaciones y álgebra

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

El estudio de sucesiones de números naturales, la búsqueda de regularidades en los términos de la sucesión, permite descubrir relaciones ocultas y la asociación de un término de la sucesión con el número que lo representa. Esto conduce naturalmente a la comprensión de ciertos conceptos que son fundamentales en las matemáticas y que son bastante complejos, como el de variable y el de cambio serán utilizados posteriormente en el estudio de las funciones.

Métodos

1. El concepto de variable es bastante difícil para muchos estudiantes. En el Primer ciclo, los estudiantes desarrollan una noción de variable como un espacio o una figura en dónde ubicar un número específico o un valor faltante. En el Segundo ciclo, ellos aprenden a sustituir el espacio vacío o la figura por una letra.

2. En el 1er Año es conveniente proponer sucesiones simples y solicitar a los estudiantes en forma de juego que identifiquen el término que sigue. Por ejemplo, que complete el número que ocupa el espacio que sigue al último término de la sucesión dada: $4, 7, 10, 13, 16,$ ______.

3. Otro ejemplo un poco más complejo y utilizando otra representación (tabular) consiste en marcar en una tabla números naturales y solicitar que completen algunos datos ocultos.

5	9	13	?	21	?	29	33	?	?

El nivel de complejidad aumenta en el 2° y el 3er Año. Algunas sugerencias son:

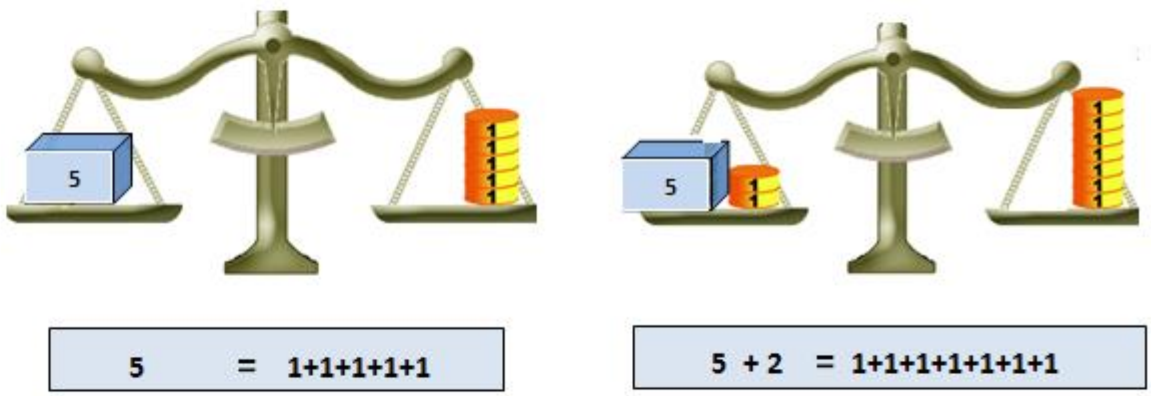
a. Completar la tabla:

No. chocolates	1	2	3	4	5
Precio de cada chocolate(colones)	60	120	180	?	?

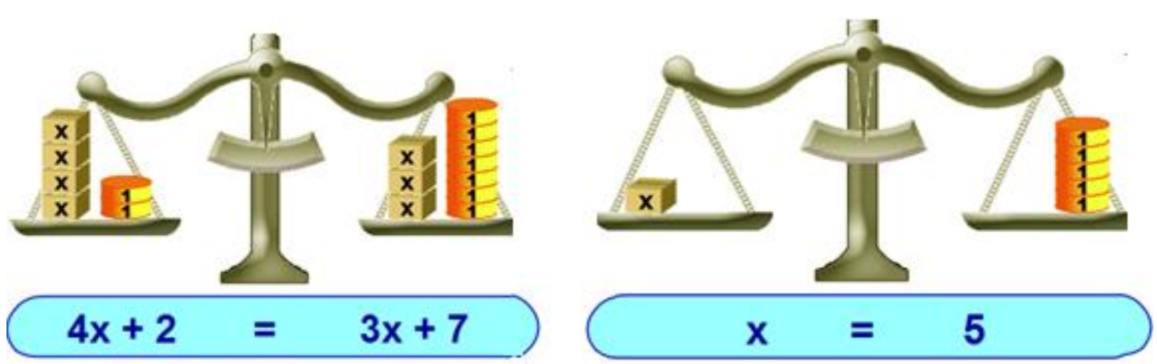
b. Completar la sucesión: 2, 4, 3, 6, 4, ____, ____, 10
c. Completar la sucesión: 80, 240, 160, 480, 320, ____, _____

d. Ejemplo de sucesión no numérica: encontrar el siguiente término de la sucesión de puntos que forman los denominados números pentagonales.

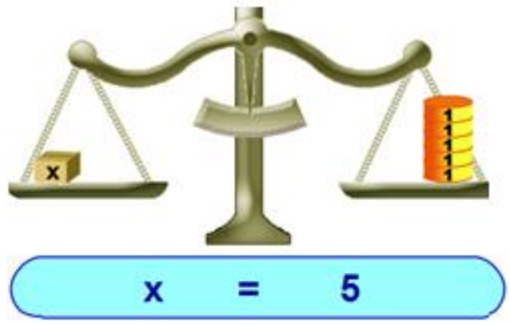
4. Otro concepto importante es el de igualdad. Este concepto tiene que ser desarrollado en todos los ciclos, desde el Primer ciclo, en el 1er Año, hasta el diversificado. En este ciclo los estudiantes deberían comprender el signo de igualdad como un símbolo de equivalencia y de equilibrio.



En el 6°Año se puede utilizar esta misma idea de una manera más simbólica así como utilizar la equivalencia entre los objetos que aparecen en la expresión matemática para que la ecuación sea válida. Por ejemplo la balanza de la izquierda está en equilibrio, indicando que$4x+2=3x+7$, mientras que la balanza de la derecha, también en equilibrio, nos indica que el cubito de masa desconocida *x* equivale a cinco trozos cilíndricos de masa igual a una unidad, es decir, la solución de la ecuación es $x=5$



5. De igual manera, la desigualdad puede ser visualizada como un desequilibrio, como nos sugiere las figuras que siguen, suponiendo que todos los animales tienen el mismo peso.



6. El concepto de cambio también es importante para la comprensión de las funciones y puede ser desarrollado desde el Primer ciclo. Los estudiantes pueden describir cambios cualitativos (más alto que, más bajo que, más joven que) y avanzar hacia cambios cuantitativos (veinte años mayor que, un metro más alto que). También es recomendable utilizar recortes de periódicos o revistas para comparar representaciones gráficas en forma de barras para representar cambios.

7. Los modelos matemáticos planteados deberían ser sencillos y se recomienda el uso de objetos, dibujos, figuras y símbolos para modelar situaciones que involucran suma y resta de números enteros.

Gestión

La idea general, para todos los ciclos, consiste en empezar la clase con una situación problemática (problema, juego, etc.), sea para repasar un concepto o bien para introducir un concepto nuevo para los estudiantes. Estimular a los estudiantes para que participen activamente en la resolución de la situación, comuniquen sus hallazgos, planteen nuevas actividades, hasta llegar a la institucionalización del concepto por parte del docente.

Se debe permitir que cada estudiante "invente" o "construya" su propia sucesión para que la resuelvan sus compañeros y posteriormente comparta con los demás la estrategia utilizada en la construcción de la sucesión. Motivarlos a utilizar diferentes patrones para así lograr obtener un banco de ejercicios para utilizar en cualquier momento que se quiera reforzar el contenido.

El compartir estrategias propias contribuye al desarrollo de procesos como: resolución de problemas, comunicación, razonamiento, argumentación y demostración, que serán necesarios en los niveles superiores. Por otro lado ayuda al estudiante en su autoestima en relación con el dominio de la matemática, la participación activa y colaborativa y al respeto hacia la opinión de los demás.

Las expresiones y las relaciones matemáticas permiten introducir de forma más natural el concepto de variables y de dependencia entre variables.

Para las representaciones matemáticas es conveniente empezar con la verbal e ir cambiando a la tabular, la geométrica (sucesión de puntos, dibujos, representación de números naturales en la recta numérica) y poco a poco ir introduciendo la algebraica. La articulación entre distintas representaciones promueve un aprendizaje significativo de un concepto. Por ejemplo, el docente puede dictar: agregar 5 al doble del número 8, para que los estudiantes lo escriban en forma simbólica: $2 \times 8 + 5$. También se puede dar una expresión en forma simbólica para que los estudiantes la repitan verbalmente o bien una tabla para que los estudiantes "traduzcan" el patrón oculto en forma verbal.

3	15
4	20
5	25
6	30
7	35

Esta búsqueda de regularidades o patrones y las representaciones son procesos que conectan la aritmética con la geometría. Además ayuda a desarrollar habilidades de abstracción y contribuye a la expansión del pensamiento algebraico, es decir, el manejo de símbolos.

Elabore situaciones para que los estudiantes puedan hacer conjeturas, y abra espacios para que ellos comuniquen sus estrategias y resultados, procurando utilizar el lenguaje matemático adecuado para el nivel.

Es fundamental proporcionar situaciones diversas que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades de cálculo mental. Ellos aprenderán en forma progresiva, a seleccionar la estrategia más adecuada para cada situación.

Planifique con cuidado el uso de recursos, los tiempos asignados a las actividades y la institucionalización. Para la actividad inicial, es importante que los estudiantes tengan el tiempo adecuado para trabajar en la situación problema, discutan en sus grupos y comuniquen sus hallazgos con todo el grupo y el profesor. Por otro lado, el profesor tiene que resistir la tentación de dar respuestas a los grupos de trabajo para ganar tiempo. También hay que planificar el tiempo para la elaboración de los proyectos así como su evaluación.

Recursos

En cuanto a los recursos, en el Primer ciclo es conveniente utilizar materiales manipulables de distintos tipos, incluyendo el geoplano, el soma, papel de construcción, materiales reciclables, objetos del entorno del aula. Los materiales manipulables deben ser utilizados de manera reflexiva en situaciones de aprendizaje en dónde su uso facilite la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. Es importante utilizar juegos para introducir conceptos matemáticos.

Es recomendable el uso de periódicos, revistas, resultados de eventos deportivos, resultados de elecciones, informaciones en etiquetas de productos, páginas Web con datos reales e informes con datos estadísticos.

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Reconoce patrones.
- Usa el método de resolución de problemas.
- Realiza explicaciones de los resultados en forma oral y pictórica.
- Realiza conexiones entre la matemática y otras materias.
- Utiliza representaciones relacionadas con la modelización.

Problemas y situaciones didácticas

En esta sección se enunciardn tres problemas para cada uno de los tres grados que constituyen el Primer ciclo. Por año, cada problema estará asociado a un nivel de complejidad: reproducción (☸), conexión (☯) y reflexión (⌚).

1° Año

☸ Complete los espacios representados por una línea, con los números naturales que faltan: 7, 15, 23, 31 ,____ ,_____ ,_____

Solución

Se debe notar que de 7 a 15 hay una diferencia de 8 al igual que de 15 a 23 y de 23 a 31. Entonces se tiene que cada término se consigue al sumarle 8 unidades al término anterior, como se muestra en la siguiente tabla:

Sucesión	Patrón
7	$7+8=15$
15	$15+8=23$
23	$23+8=31$
31	$31+8=39$
39	$39+8=47$
47	$47+8=55$

Por lo tanto, los números naturales que faltan son 39, 47 y 55; ya que

$$39 = 31 + 8$$

$$47 = 39 + 8$$

$$55 = 47 + 8$$

Este problema es de reproducción y la idea es desarrollar habilidades de cálculo mental

☯ Complete la tabla:

Número de bolsas	1	2	3	4	5
Número de confites	15	30		60	

Solución

La idea es asociar la suma con la multiplicación. Por ejemplo, observar que si hay 15 confites en una bolsa entonces en dos bolsas tendría $15+15$ confites, o sea 30 confites, lo que equivale a multiplicar 15 por 2 y así pueda corroborar el resultado en la tabla. Análogamente en tres bolsas tendría $15+15+15=45$ confites, o bien 15×3. Sería deseable que en el caso de las 5 bolsas utilizara la información de las 4 bolsas e hiciera la siguiente suma: $60+15=75$.

Es importante con este tipo de ejercicios que el estudiante identifique que el patrón es sumar 15 confites al número de confites anterior o también en un nivel mayor de abstracción que para encontrar un término de la sucesión se multiplique la cantidad de bolsas por 15 confites. Luego se le puede cambiar al problema la cantidad de confites, para que el estudiante pueda concluir la generalidad del problema que sería multiplicar la cantidad de bolsas por la cantidad de confites de cada bolsa.

En este problema la conexión es con la representación tabular y con proporción directa.

🕘 Considere el siguiente patrón: ☺ ▲ ☎ ☺ ▲ ☎ ☺ ▲ ☎

Utilice vocales para escribir un patrón de letras que representa el patrón dado.

Sugerencia

En este caso hay que asociar una letra a cada dibujo. Esto contribuye a la abstracción y además demanda reflexión para comprender la relación.

Solución

Si al símbolo ☺ lo asociamos con la letra A, ▲ a la letra B y ☎ a la letra C entonces el patrón de letras que representa la sucesión dada es ABCABCABC. Luego de hacer esta asociación de símbolos con letras se podría variar el patrón de la sucesión de símbolos por ejemplo ☎☎ ▲☺☎☎ ▲☺☎☎▲☺ para que el estudiante pueda representar la sucesión como CCBACCBACCBA. Sería pertinente utilizar figuras relacionadas con la flora y la fauna de Costa Rica en lugar de los símbolos anteriores. Por ejemplo: la rana dorada, la lapa verde, la mariposa morfo. Esto abriría espacios para hablar de la responsabilidad que tenemos con nuestros recursos y de las especies en peligro de extinción.

Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de participación activa y colaborativa.

Los problemas anteriores deben ser aprovechados por el docente para activar el proceso de comunicación, ya que cada uno debería concluir con una explicación verbal por parte del estudiante en la cual razone y justifique su respuesta.

2° Año

⚇ Soy un número. Usted no me menciona si cuenta de 5 en 5. Tampoco me menciona si cuenta de 2 en 2. Soy mayor que 13 y menor que 19. ¿Qué número soy?

Solución

En este caso, el estudiante puede iniciar considerando la información “Soy mayor que 13 y menor que 19”, para enlistar los números que cumplen dicha condición:

$$14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18.$$

Luego, podría iniciar descartando aquellos números que cumplan las condiciones mencionadas. Por ejemplo, “Usted no me menciona si cuenta de 5 en 5”, permite eliminar el número 15 y “Tampoco me menciona si cuenta de 2 en 2”, descarta los números 14, 16 y 18. Así, dicho número es el 17.

☯ Complete los espacios representados por una línea con los números que faltan: 1, 3, 7, 15, 31, ___, ____

Solución

En este caso el patrón es multiplicar el término anterior por dos y sumarle una unidad. Esto permite hacer conexión con el álgebra. En la siguiente tabla se muestra la solución del problema.

Patrón	Sucesión
	1
1 × 2 + 1	3
3× 2 + 1	7
7× 2 + 1	15
15× 2 + 1	31
31**× 2 + 1**	**63**
63**× 2 + 1**	**127**

Los números que faltan son 63 y 127.

¿Cuántos números naturales comprendidos entre 200 y 500 tienen el 1 como dígito de las decenas?

Solución

En este problema hay que buscar regularidades. Por ejemplo entre 210 y 219 tenemos 10 números naturales. Por lo tanto, hay 30 números naturales comprendidos entre 200 y 500 que tienen el 1 como dígito de las decenas; ya que de 210 a 219 hay 10, de 310 a 319 hay 10 y de 410 a 419 hay 10.

3° Año

Encontrar el antecesor y el sucesor del número $347 - (18 \times 7)$.

Solución

Se resuelve la operación

$$347 - (18 \times 7) = 347 - 126 = 221$$

Así, su antecesor es 220 y el sucesor 222.

☯ ¿Qué número hace que se cumpla la igualdad $237 - 85 = 58 + \square$?

Solución

En este problema el estudiante puede utilizar varias estrategias. Una de ellas puede ser el tanteo: luego de obtener que

$$237 - 85 = 152$$

el estudiante puede sustituir en □ por un determinado número y realizar la operación del lado derecho del igual. Se busca con "ensayo y error" la posibilidad de encontrar el valor que cumpla con la igualdad, en este caso es 94. Por ejemplo, el estudiante podría realizar la siguiente secuencia de intentos:

$$58 + 100 = 158$$

$$58 + 90 = 148$$

$$58 + 95 = 153$$

$$58 + 94 = 152$$

¡EUREKA!

Al sustituir el símbolo □ por un valor numérico se logra una conexión con el lenguaje algebraico. Un posible error consistiría en hacer la operación del lado izquierdo de la igualdad y al observar en $152 = 58 + \square$ que 152 no es igual a 58 entonces concluye que el problema no tiene solución.

🕘 Damaris compró algunas cajas con galletas. Cada caja tiene 23 galletas y compró 299 galletas en total. Busque una estrategia para encontrar el número de cajas de galletas que compró.

Solución

El estudiante podría plantearse la siguiente estrategia:

$$23 + 23 = 46$$

$$46 + 23 = 69$$

$$69 + 23 = 92$$

$$\vdots$$

$$276 + 23 = 299$$

Luego contar cuántas cajas sumó. También, podría utilizar una estrategia más directa analizando que las 299 galletas vienen en presentaciones de 23 cada una, entonces al dividir el total de galletas entre el total por cada caja se obtendría la cantidad de cajas.

$$299 \div 23 = 13 \text{ cajas en total.}$$

Es importante discutir las ambas estrategias.

Los problemas anteriores deben ser aprovechados por el docente para activar el proceso de razonamiento y argumentación.

Comentarios sobre los problemas

Los problemas propuestos buscan la utilización de distintas estrategias para su solución. Además son introducidas algunas representaciones desde muy temprano, como el uso de tablas, la representación verbal y la simbólica, con el uso de las cajitas o espacio en blanco para que el estudiante introduzca el número faltante en una expresión.

Uso de historia de las matemáticas

Anécdota: Gauss, el niño prodigio

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó grandemente en muchos campos científicos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Él es considerado el príncipe de las matemáticas y fue un niño prodigio. Aprendió a leer solo y, sin que nadie lo ayudara, aprendió aritmética.

Existen muchas anécdotas acerca de su genialidad. Cuando tenía 9 años de edad, su profesor de aritmética J. G. Büttner, propuso el problema de sumar los números naturales del 1 al 100, para ver si lograba mantener a sus 100 alumnos ocupados por un buen rato. Gauss halló la respuesta correcta casi inmediatamente diciendo “la tengo”, y su respuesta fue 5050. Él se dio cuenta de que la suma solicitada simplemente era 50 veces la suma de 101, número formado por las parejas 1 y 100, 2 y 99, 3 y 98, y así sucesivamente. Además hizo el cálculo de 101 multiplicado por 50 mentalmente, sin utilizar papel ni lápiz.

Referencia: Katz, V. (2010). *A History of Mathematics. An introduction.* Tercera Edición. Addison-Wesley.

Carl Friedrich Gauss. http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Recuperado el 11/05/2011

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema, y se exponen posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

Resolviendo un Sudoku

Modalidad	Área	Año	Objetivo
Problema	*Relaciones y álgebra*	1[er]	Utilizar reconocimiento de patrones para resolver un sudoku.

Sudoku es un juego que se popularizó en Japón en 1986 y ganó prestigio internacional en el año 2005 cuando numerosos periódicos empezaron a publicarlo en su sección de pasatiempos. El objetivo del sudoku es rellenar una cuadrícula (tabla) de 9 × 9 celdas (81 casillas) dividida en subcuadrículas (subtablas) de 3 × 3 con las cifras del 1 al 9 partiendo de algunos números ya dispuestos en algunas de las celdas. También se pueden utilizar figuras, letras o colores. Lo que importa, es que sean nueve elementos diferenciados, que no se deben repetir en una misma fila, columna o subtabla. Un sudoku está bien planteado si la solución es única.

Para este nivel utilizaremos un sudoku más simples, formado por una tabla de 4 × 4 dividida en subtablas de 2 × 2 y utilizaremos ciertos elementos de nuestra cultura costarricense. Los 4 elementos que utilizaremos son:

1. La extinta rana dorada (*Incilius periglenes*)

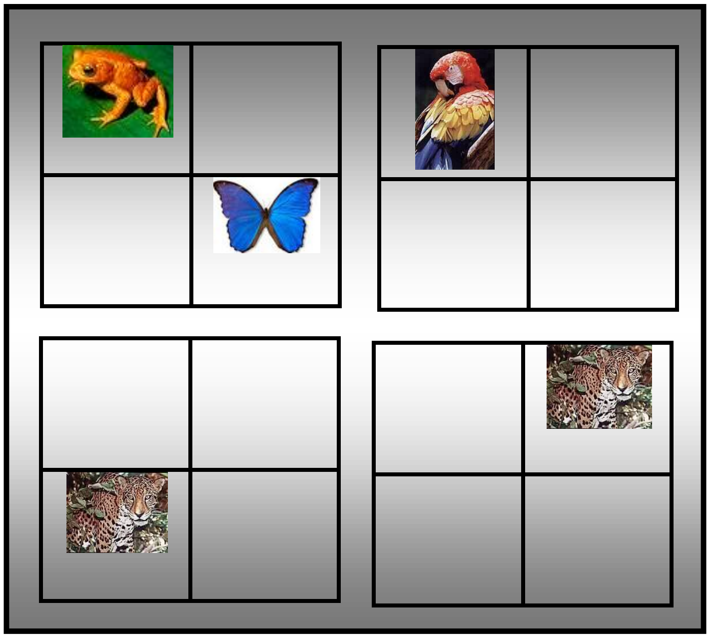
2. Mariposa morpho (*morpho peleides*)

3. Lapa roja o guacamaya (Ara Macao)

4. El jaguar (*Panthera onca*)

Algunas celdas ya contienen figuras y el objetivo es rellenar las celdas vacías, con una figura en cada una de ellas, de tal forma que cada columna, fila y subtabla contenga las figuras una única vez.

Completar un sudoku requiere reconocer patrones y utilizar razonamiento lógico.



Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Aquí se califica si el estudiante realmente realizó intentos orientados hacia la comprensión del problema planteado.

- *Establecimiento de una estrategia:* Una vez comprendido el problema, es conveniente calificar el tipo de estrategia empleado por el estudiante. En este caso, se deben considerar aspectos como la utilización de subcuadros primero, como si fueran subproblemas y la factibilidad de la solución global.

- *Desarrollo de la Estrategia:* Se valora si el estudiante hace un uso adecuado de procedimientos lógicos para desarrollar la estrategia.

- *Autorreflexión sobre la estrategia:* En este punto se evalúa la pertinencia de la estrategia empleada, valorando si el estudiante mantiene un control sobre algunas variantes del problema.

- *Persistencia*: Se valora si el estudiante decide seguir trabajando en el problema.

- *Análisis de los resultados:* Se considera la factibilidad de los resultados obtenidos. Se puede valorar la comprensión que tiene el estudiante de la situación por medio de preguntas. Se puede variar algunos elementos del problema y verificar las respuestas del estudiante.

- *Conclusión:* Es la respuesta a las preguntas planteadas.

Este problema puede ser planteado en niveles superiores, aumentando el tamaño del cuadrado, es decir, el número de celdas. Para 2° y 3^er^ Año se puede usar cuadrado 6×6 con 6 subcuadrados 2 × 3 mientras que para el Segundo ciclo se puede utilizar cuadrados 9 × 9 con 9 subcuadrados 3×3. Se sugiere aumentar la complejidad cambiando figuras por letras y posteriormente por números del 1 al 9.

Situación problema

Pintando el aula

Los estudiantes quieren colaborar para que el aula esté bien pintada. El problema consiste en calcular la cantidad y el precio de pintura necesaria para pintar el aula.

Modalidad	Área	Año	Objetivo
Proyecto	*Relaciones y álgebra*	3er	Aplicar operaciones básicas de suma y multiplicación en la resolución de problemas contextualizados.

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Se toma en consideración el trabajo en equipo y la participación de todos los miembros en el análisis de la estrategia a utilizar.

- *Diseño de la estrategia que involucra la situación problema:* Se evalúa la organización del equipo para hacerle frente al problema, la creatividad y la originalidad de la estrategia planteada, tomando en cuenta la factibilidad y la búsqueda de información que optimice la calidad y el costo de los materiales que serán utilizados.

- *Implementación de la estrategia:* Se evalúa el uso correcto de los procesos matemáticos, la originalidad y factibilidad de lograr una respuesta de manera ágil y correcta en cada situación.

- *Análisis de los resultados:* Se toma en consideración si la estrategia utilizada para realizar la selección de los materiales es la más apropiada y si el procedimiento para realizar los cálculos es correcto y eficiente. También es importante evaluar las argumentaciones utilizadas para los posibles cambios de estrategia.

- *Comunicación de los resultados y conclusiones:* Evaluar la comunicación de los resultados en forma oral, donde cada estudiante informa brevemente cuáles fueron las dificultades mayores que se les presentaron como también cuáles procesos le resultaron más fáciles y que se puede mejorar en caso de otra oportunidad de repetir el proyecto. Tome en consideración si los resultados obtenidos responden a la pregunta planteada así como su factibilidad.

- *Conclusión:* Se evalúa que la respuesta dada contenga los elementos necesarios que solucionan el problema planteado.

Primer ciclo, Estadística y probabilidad

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

Cada uno de los tres años del ciclo se inicia con la identificación de información dentro de la cotidianidad. En el 1er Año, se emplean datos muy simples vinculados con el entorno inmediato y a medida que avanza se requiere incorporar información más compleja, mucha de ella proveniente de medios de comunicación y otras fuentes de la sociedad. El docente debe propiciar espacios de análisis no solamente en relación con la identificación del dato sino con el mensaje que proyecta. Este proceso debe permitir al estudiante generar una habilidad crítica ante la información que le rodea.

Para el 2^{o} y 3er año, además de la información documental, se incluyen diagramas, esquemas, cuadros y gráficos con información que pueda ser interpretada por los estudiantes. Con ello se pretende que puedan iniciarse en la lectura de información resumida mediante estas herramientas, así como en identificar la necesidad de resumir datos empleando dichos recursos.

Después de esta etapa, se realiza un trabajo más interactivo, se propone el desarrollo de las habilidades por medio de una participación activa de los estudiantes mediante la búsqueda de respuestas a interrogantes previamente diseñadas por el docente, que pretende vincularlos con entornos cercanos. No obstante, si las circunstancias lo ameritan, el educador puede simular experiencias con el propósito de lograr un mayor potencial para generar las habilidades propuestas. En esta etapa, el énfasis se centra en destacar cómo la variabilidad que presentan los datos obliga a recolectar y analizar gran cantidad de ellos para comprender su comportamiento y responder preguntas concretas.

Por otro lado, en relación con el manejo de situaciones aleatorias y la probabilidad de resultados o eventos, para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas, las interrogantes deben ser muy puntuales y enfocarse directamente hacia las habilidades específicas en cada nivel. Todavía no se cuantifican numéricamente las probabilidades, únicamente se habla de eventos más o menos probables en relación con estas ideas intuitivas.

En todo momento se pretende que los estudiantes puedan, por medio de la Estadística, modelar y representar la realidad para favorecer su interpretación.

Métodos

1. El concepto de dato como unidad primaria para el análisis, debe quedar muy claro en los estudiantes. Sea cualitativo o cuantitativo, se debe valorar el rol que juega dentro del proceso. No obstante, el dato corresponde a un atributo o característica de un ente, no tiene sentido en sí mismo, pero al momento en que se contextualiza o, desde un punto de vista estadístico, se agrupan y procesan datos de la misma naturaleza, genera valiosa información para la comprensión de un fenómeno o para la toma de decisiones.

2. La variabilidad debe concebirse como fuente principal de los análisis estadísticos, aunque el dato resulta de vital importancia, debe quedar claro que para posibilitar análisis estadísticos, un dato aislado no es una fuente de análisis, sino la variabilidad que presenten los valores de una observación o respuesta a otra. Al estudiante debe quedarle claro que, si todos los datos fueran iguales o sea si no existiera variabilidad en las respuestas u observaciones realizadas para generar datos, los análisis estadísticos carecerían de importancia. En las indicaciones se ofrecen algunos ejemplos que ponen en evidencia la importancia de la variabilidad. Una situación en la que la variabilidad no esté presente puede ayudar a fortalecer esta idea, por ejemplo: diez personas llegan a comprar un kilo de arroz a supermercado, el precio es de ¢1 100 por kilo. Se les pide que realicen un análisis con los 10 datos generados.

3. Aunque se trabaja en la construcción de cuadros y gráficos, así como en la determinación de algunas medidas de resumen; se debe enfatizar en que ellas son únicamente herramientas, lo fundamental dentro Estadística radica en el mensaje general y específico que se desea suministrar con cada técnica. Estos elementos deben verse como un vehículo para proporcionar ese mensaje y ofrecer una respuesta concreta al problema original.

4. Por lo expuesto en el punto anterior, se debe prestar especial atención a la información que suministra cada técnica y la forma en que debe ser interpretada para que se ajuste a la realidad. A manera de ejemplo, es común que al interpretar la moda se diga que la mayoría de las observaciones toma este valor, lo cual, en muchos de los casos, es una afirmación falsa. La moda es el valor que más se repite o que tiene mayor frecuencia. Pero al hablar de mayoría, se refiriere a más de la mitad de las observaciones, evidentemente son conceptos diferentes.

5. En este mismo sentido, para algunas de estas herramientas, hay indicaciones que no son reglas sino que se utilizan para favorecer una mejor presentación; por ejemplo, en los gráficos de barras, para el caso de datos cuantitativos se acostumbra emplear barras verticales, y en el caso de datos cualitativos barras horizontales, esto simplemente es una sugerencia para facilitar la lectura del gráfico; pero, si no se cumpliera, no se afecta la información que suministran.

6. Para facilitar la interpretación, tanto cuadros como gráficos deben llevar un título que permita hacer una lectura sin necesidad de leer el contexto donde se generó, por ello debe ser suficientemente comprensible.

7. En este Primer ciclo, el estudiante debe concebir las situaciones, experimentos o juegos aleatorios como aquellos en los que no se puede predecir de antemano su resultado, debe interpretarse que

dichos resultados están en función del azar. A diferencia de las situaciones deterministas o seguras. Además de juegos con monedas, dados, ruletas, entre otros; se deben incluir situaciones cotidianas que están vinculadas con el azar, esto va a favorecer que los estudiantes puedan tener un mayor acercamiento con estas experiencias y sus decisiones. También es oportuno romper algunas ideas equivocadas sobre estos conceptos; por ejemplo, la creencia que juegos del tipo “zapatito cochinito cambia de pie”, “de tin marín de do pingüé…” son aleatorios, cuando realmente son deterministas pues se puede conocer de antemano quién va a ganar.

8. El proceso de institucionalización o cierre de cada actividad planteada está a cargo del docente, por lo que debe resumir los hallazgos en cuanto a las estrategias utilizadas, corregir posibles errores que hayan cometido y verificar que el concepto ha sido comprendido adecuadamente. Por ejemplo, conceptos como *frecuencia absoluta* no pertenecen al lenguaje común de los estudiantes; por lo que durante el desarrollo de las lecciones se emplea *número de repeticiones*; similarmente el concepto de *evento* no surge espontáneamente, sino que se emplea *resultado* u algún sinónimo. Con el propósito de ampliar el lenguaje hacia una mayor especialización, durante la institucionalización los conceptos de frecuencia absoluta y evento deben ser precisados y reconocer la información que generan. Al igual que ellos surgen muchos otros tales como: representación tabular, máximo, mínimo, espacio muestral, etc.

Gestión

Para el logro de las habilidades, la mayoría de actividades que se proponen implican el trabajo del estudiante en búsqueda de respuestas a interrogantes previamente establecidas por el docente, para ello se recomienda priorizar el trabajo en grupo de 3 o 4 estudiantes, de modo que pueda establecerse la discusión y la búsqueda de una puesta en común sobre las alternativas de análisis y las respuestas a las interrogantes.

Es necesario que el docente diseñe situaciones y planteé interrogantes cuya respuesta permita que los estudiantes pongan en evidencia las habilidades requeridas para el nivel. No obstante, en este Primer Ciclo, no es conveniente involucrar más de una particularidad de un ente a la vez, esto quiere decir que las preguntas deben ser suficientemente específicas para delimitar el trabajo de análisis a ella. Además, es fundamental alternar información cuantitativa y cualitativa.

Se sugiere que las situaciones planteadas no sean simplemente la repetición de las actividades previas, sino que les implique un reto adicional, se espera que estén en capacidad de analizar la redacción de la pregunta, plantear una estrategia de recolección y análisis; ponerla en práctica y brindar una respuesta concreta a la interrogante. Algunas de las situaciones que se elaboren pueden ayudar a crear conciencia sobre tópicos de interés: reciclaje, cuido del ambiente, consumos de alimentos sanos, etc. Es importante enfatizar en este tipo de temas, pues permite modificar sus actitudes y creencias para favorecer una mejor conciencia social.

Entre 2º y 3er Año existen pocas diferencias en cuanto a contenidos, lo que se pretende es fortalecer las habilidades, por lo que se requiere incrementar el nivel de dificultad de las situaciones que se planteen en 3er Año.

Recursos

Debido a que la utilización de situaciones del contexto y los juegos son actividades sobre las que se estructura el desarrollo de los conceptos para el ciclo, se obliga a emplear diversos recursos y entes que se encuentran en el medio estudiantil para generar datos o situaciones de interés. El estudiante, la escuela, el hogar o la comunidad son fuentes invaluables de datos de distinta naturaleza que están a disposición del docente, para generar problemas o interrogantes en función de las habilidades propuestas. Además se puede recurrir a juegos cotidianos o juegos con monedas, dados, ruletas, bolas, entre otros, y al empleo de otros materiales concretos, tales como frutas, lápices, recortes de periódico o revistas, Internet, entre otros.

Debe tenerse presente que se requiere establecer recursos que generen datos de una manera sencilla que sean de interés para el estudiante, de modo que se sienta motivado para realizar el tratamiento de los datos y ofrecer respuesta a las interrogantes planteadas.

Aunque el recurso informático es fundamental para los análisis estadísticos, en este primer nivel, no es absolutamente necesario. Es muy importante, en esta primera etapa que se involucre con la recolección, análisis e interpretación desde un punto de vista manual o concreto, por lo que los entes manipulables son una mejor alternativa.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones problema que se deben estructurar para este ciclo deben enfocarse hacia escenarios concretos que permitan al estudiante ir involucrándose paulatinamente hacia el análisis de la información.

Para cada año se plantean tres problemas; el primero de ellos es de reproducción de las habilidades adquiridas (⚇), el segundo se denomina de conexión (☯) pues vincula conceptos de estadística o probabilidades con otras áreas y el tercero es de reflexión (🕘), que obliga a los estudiantes razonar un poco más sus análisis. No obstante, se debe indicar que por la naturaleza de estas áreas, muchos elementos se entremezclan.

1° Año

⚇ Esta es una de las actividades que se proponen para trabajar en subgrupos de tres o cuatro estudiantes. Cada uno de estos subgrupos trabaja en temas distintos pero en actividades similares. Por ejemplo, a los estudiantes de uno de ellos se les plantea la siguiente situación:

Se entrega una lista con los nombres de los estudiantes del grupo y se pide que al lado del nombre de cada uno indique cuál es la mascota preferida (Esto requiere que identifiquen y pongan en práctica una estrategia para recolectar esta información). Luego se les pide que realicen un recuento de los resultados, de modo que puedan responder:

a. ¿Cuáles son todas las mascotas preferidas para los estudiantes del grupo?
b. ¿Cuál es la mascota que más prefieren los estudiantes de este grupo? ¿Cuántos niños indican que es su mascota preferida?
c. ¿Cuál es la segunda y cuál la tercer mascota preferida? ¿Cuántos niños dieron por respuesta a cada una de ellas?

Sugerencia

Las sugerencias correspondientes al grupo de preguntas anterior son las siguientes:

a. Se puede usar clasificación o enlistado.
b. Se hace uso de la noción de Moda.
c. Se puede ordenar por preferencia.

Finalmente, se pide que expongan los resultados obtenidos ante el grupo, al igual que deberían hacer los demás subgrupos con los temas que abordó cada uno.

El docente debe aprovechar los resultados para institucionalizar los conceptos de agrupamiento de datos, frecuencia de cada respuesta y cualquier otro que haya surgido de la experiencia realizada.

☯ Los estudiantes del subgrupo deben iniciar con la lectura del siguiente cuento:

EL DUENDE Y EL BÚHO

Teresa y Francisco Briz Amate

Había una vez un duende que vivía en una seta de chocolate del bosque. Cerca de su casa pasaba un río de aguas azules y transparentes. Todas las mañanas el duende atravesaba el río para comprar comida en el mercado del bosque. Le gustaba mucho hablar con sus amigos, el oso carnicero, la nutria pescadera y el lobo panadero.

Un día el duende conoció a un nuevo animal del bosque que había viajado mucho por todo el mundo, era un búho muy sabio.

El duende y el búho se hicieron muy amigos y todos los días se reunían en la casa de chocolate para jugar al ajedrez.

Y colorín colorado este cuento se ha acabado, si quieres que te lo cuente otra vez cierra los ojos y cuenta hasta tres.

http://www.elhuevodechocolate.com/cuentos/cuentos11.html

De la lectura del cuento anterior, identifique la información que permite responder las siguientes preguntas:

a. ¿Dónde vivía el duende?
b. ¿Qué había cerca de su casa?
c. ¿Dónde compraba el duende la comida?
d. ¿Qué animal era el panadero?
e. ¿Qué animal era el pescadero?
f. ¿Qué nuevo animal llegó al bosque?
g. ¿Por dónde había viajado el búho?
h. ¿Cómo era el búho?
i. ¿Eran amigos el duende y el búho?
j. ¿Dónde se reunían el duende y el búho?

k. ¿A qué jugaban el duende y el búho?

Solución

Las respuestas correspondientes al grupo de preguntas anterior son las siguientes:

a. El duende vivía en el bosque
b. Cerca de su casa había un río.
c. El duende compraba la comida en el mercado.
d. El panadero era el lobo.
e. El pescadero era la nutria.
f. Un búho.
g. El búho había viajado por el mundo
h. El búho era muy sabio.
i. Sí, ellos eran amigos.
j. Ellos se reunían en la casa de chocolate.
k. El duende y el búho jugaban al ajedrez.

Con este tipo de ejercicios se pretende que el estudiante sea capaz de identificar información en ámbitos diversos. Como se puede notar, aunque los datos que se generan del texto son estadísticos, pues no están sujetos a una cuantificación, sí es información de interés, por lo que el promover el análisis, favorece la toma de informaciones en un texto.

🕘 Escoja dos niños del grupo y póngalos a jugar, mientras el grupo canta la siguiente canción:

De tín marín de do pingüé, cúcara, mácara, títere fue. Yo no fui; fue Teté. Pégale, pégale que ella fue.

a. Repita la experiencia cinco veces siempre iniciando en el mismo niño (observe que no se descompongan palabras dentro del juego). Pregúnteles ¿Qué conclusiones se pueden obtener de la experiencia?

Seguidamente se introducen dos bolas de colores distintos (digamos rojo y azul) en una bolsa de papel, dos niños deben jugar al extraer una bola de la bolsa (sin ver), iniciando ahora con el otro niño. El juego lo gana el niño que obtiene la bola azul.

b. Al igual que antes, repita la experiencia al menos cinco veces, procurando revolver las bolas antes de cada extracción. Nuevamente ¿pregúnteles por las conclusiones?

c. Además pregunte: si tuvieran que escoger un método para seleccionar a uno de los niños ¿Cuál de los dos métodos utilizarían? ¿Por qué?

.

Solución

a. En los cinco experimentos (juegos), se observa que con la persona que se inició se terminó; esto ya que el número de palabras (20 palabras) de la canción es múltiplo de la cantidad de niños jugando (2 niños). Al poder predecir el ganador antes de que se realice el juego se dice que el experimento es determinista.

b. El ganador puede ser cualquiera de los dos. Al no poder predecir el ganador antes de que se realice el juego, se dice que el experimento (juego) es aleatorio, ya que depende del azar.

c. El segundo porque no se tiene certeza sobre el ganador, es más justo.

Aquí se debe observar que en el primer caso, al ser una experiencia determinista siempre va a ser seleccionado el estudiante que no inicia (pues hay un número par de palabras), mientras que en la segunda experiencia, el resultado no varía y no depende de quién saca primero la bola.

Problemas de este tipo deben ir orientando al estudiante para identificar las diferencias entre eventos aleatorios y deterministas, aunque sea a un nivel intuitivo.

2° Año

☸ Esta es una situación de experimentación simple. Se requieren al menos 10 mandarinas, si fuera posible darle una a cada uno de los estudiantes del grupo sería mejor. El propósito es que antes de comerse las mandarinas, para cada una de ellas se cuente el número de gajos y el número de semillas que poseen. Se escogen dos subgrupos, el primero debe recolectar la información sobre gajos y el segundo sobre semillas.

Una vez que hayan recolectado esta información, para el subgrupo que trabaja con mandarinas se solicita:

a. Ordenar los datos y clasificarlos de acuerdo con la cantidad de mandarinas que tiene un número de gajos determinado.
b. Seguidamente deben responder las siguientes preguntas:
    i. ¿Cuál es el mayor número de gajos por mandarina que se observó?
    ii. ¿Cuál el menor número de gajos por mandarina que se observó?
    iii. ¿Cuál es el número de gajos más común entre el grupo de mandarinas?

c. Si le dieran una mandarina sin pelar y le preguntaran ¿cuántos gajos se esperaría que tuviera? ¿qué respondería?

d. Al subgrupo que trabajó con la cantidad de semillas se les pide que realicen una actividad equivalente vinculada con esa característica.

Solución

a. Debe preparar la información para completar un cuadro como el siguiente:

Número de gajos por mandarina

Número de gajos	Número de Mandarinas
8	2
9	4
⋮	⋮
Total	

b. Para el grupo de preguntas de esta parte:

i. Se recomienda que usen la noción de Máximo.
ii. Se recomienda que usen la noción de Mínimo.
iii. Se recomienda que usen la noción de Moda.

Los dos subgrupos deben exponer los resultados ante el grupo. Para aprovechar la información, se puede plantear al grupo completo, para las mandarinas con que se trabajó ¿cuál característica es más variable: el número de gajos o el número de semillas? ¿Por qué?

El docente debe institucionalizar los conceptos de frecuencia o número de repeticiones, moda o valor más común, el máximo o mayor valor y mínimo o menor valor, todos ellos vinculados con el experimento realizado.

☯ Mediante el trabajo en subgrupos, se plantea a uno de ellos el siguiente reportaje de un periódico (el docente puede buscar muchos otros):

Costarricenses piden ambientes libres de humo de tabaco

Irene Rodríguez, 12:59 p.m. 31/05/2010, Periódico La Nación

San José (Redacción). Representantes de la Caja Costarricense de Seguro Social, el Ministerio de Salud, la Universidad de Costa Rica, médicos, ex fumadores y ciudadanos en general se reúnen en la Plaza de las Garantías Sociales para abogar por una ley que prohíba el fumado en sitios públicos.

...

"El cigarrillo mata a una de cada dos personas que fuman y puede producir daños muy graves en la salud de quienes están alrededor de los fumadores. Tenemos derecho a vivir en ambientes libres de humo y que no perjudiquen nuestra salud", explicó Wing Ching Chan Cheng, jefa de neumología del Hospital México.

Una vez que los estudiantes del subgrupo han leído este artículo, se les solicita que extraigan información relevante, por ejemplo:

a. ¿Con qué propósito se realizó esta reunión en la Plaza de las Garantías Sociales en San José?
b. ¿Qué significa la frase "*El cigarro mata a una de cada dos personas que fuman*"?
c. ¿Por qué es importante que, aunque no fumemos, no estemos cerca de personas que estén fumando?

Solución

Las respuestas planteadas a las interrogantes anteriores son:

a. Con el propósito de prohibir el fumado en lugares públicos.

b. Primero, es importante explicar que hay una razón de 1 a 2, con respecto a la cantidad de personas que han muerto a causa del fumado y la cantidad de personas que fuman en datos recolectados por algún instrumento. Asimismo, hay que indicar que lo que ocurre es que la frecuencia relativa del evento de que muera una persona a causa del fumado tiende a ser 50%. Por lo tanto, hay una probabilidad de ocurrencia de este evento del 50%, dado que las frecuencias relativas de los datos recolectados tienden a este porcentaje.

c. Porque si se está cerca de un fumador, se respira siempre el humo del cigarrillo y esto equivale a fumar, por lo que resulta dañino (la persona en esta condición se denomina fumador pasivo).

Se pretende que los estudiantes sean capaces de extraer información de interés de distintas fuentes, al mismo tiempo se procura sensibilizar sobre temas de trascendencia social. Por ello una vez realizada la actividad, es importante que la expongan ante el grupo.

Cada grupo debe exponer los resultados, y la justificación en cada caso. Con los resultados obtenidos en la plenaria, el docente puede aprovechar para fortalecer las ideas intuitivas que los estudiantes han logrado sobre eventos más probables y menos probables. Así como de eventos seguros e imposibles.

🕘 Mediante el trabajo en subgrupos pida a los estudiantes de cada uno de ellos que indique ¿cuál evento es más probable para cada una de las parejas que se incluyen en el cuadro? Además, que justifiquen las razones por las que escogieron cada una de ellas (es conveniente ampliar la lista con más ejemplos vinculados con el contexto escolar o de la comunidad donde se ubica la institución).

Caso	**Evento A**	**Evento B**	**¿Cuál es más probable?**
1	Que el 1^{ero} de enero inicie un nuevo año	Que un gallo ponga un huevo	
2	Que llueva el 12 de octubre	Que llueva el 11 de abril	
3	Que el sexo de un niño que está por nacer sea masculino	Que un helicóptero aterrice al frente de la escuela	

Solución

La información que completa correctamente el cuadro anterior es la siguiente:

Caso	**Evento A**	**Evento B**	**¿Cuál es más probable?**
1	Que el 1^{ero} de enero inicie un nuevo año	Que un gallo ponga un huevo	**A**
2	Que llueva el 12 de octubre	Que llueva el 11 de abril	**A**
3	Que el sexo de un niño que está por nacer sea masculino	Que un helicóptero aterrice al frente de la escuela	**A**

3° Año

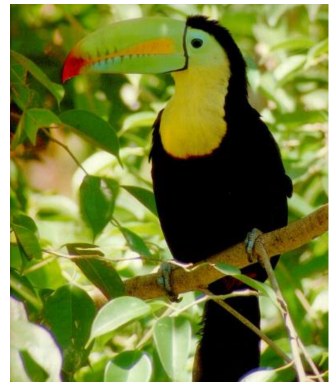
✇ Plantear la siguiente actividad para que sea resuelta entre los estudiantes del grupo: Costa Rica es un país privilegiado en cuanto a la variedad de la flora. Específicamente en aves, es posible encontrar verdaderas joyas de la biodiversidad. Cuatro de las más imponentes y que se encuentran en peligro de extinción son la lapa verde, el quetzal, la lapa roja y el tucán.

Lapa verde

Quetzal

Lapa Roja

Tucán



Fotografías extraídas de http://www.google.com

Suponga que en una reserva biológica conviven estas cuatro especies de aves, se han marcado para su estudio especímenes hembra de cuatro lapas verdes, seis quetzales, seis lapas coloradas y diez tucanes (cada una de las especies se numeró de uno en adelante). Un zoólogo coloca una trampa para escoger aleatoriamente una de las aves del refugio para analizar su estado de salud y cae en ella una de las aves que se han marcado. Con esta información realice las acciones que se solicitan

a. Describa el espacio muestral del experimento

b. Indique ¿qué especie de ave tiene mayor probabilidad de ser seleccionada? y ¿Cuál tiene menor probabilidad?

c. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable? A: el ave seleccionada es un quetzal o B: el ave seleccionada es una lapa roja. Justifique la respuesta.

d. ¿Es más probable que el ave seleccionada sea una lapa (verde o colorada) a que sea un tucán?

Solución

Las respuestas a las preguntas anteriores se enuncian a continuación:

a. El espacio muestral está compuesto por: una lapa verde, un quetzal, una lapa colorada y un tucán.
b. Los tucanes tienen mayor probabilidad por ser más (10) y las lapas verdes la menor probabilidad (por ser 4).
c. Los dos eventos son igual de probables. Pues ambas especies tienen la misma cantidad de representantes.
d. Hay 10 lapas y 10 tucanes por lo tanto es igual de probable que sea lapa o tucán.

El docente puede plantear otras preguntas relacionadas con el tema. Al final de la actividad se requiere institucionalizar algunos de los conceptos y verificar que se han alcanzado las habilidades propuestas.

Para finalizar, se puede generar una discusión vinculada con la siguiente pregunta: ¿Qué importancia tiene la conservación de estos y otras especies de fauna en Costa Rica? ¿Qué aporte puede dar cada persona para que podamos heredar a las futuras generaciones esta riqueza en biodiversidad que tenemos?

☯ Se divide el grupo en seis subgrupos. A los estudiantes de uno de ellos se les pide que identifiquen el número de letras que tiene el primer nombre de cada uno de los niños del grupo completo. Para ello se les entrega una lista con los nombres y apellidos de todos los estudiantes y se plantea lo siguiente:

a. Si medimos en letras, ¿cuáles son las longitudes de los nombres de los estudiantes del grupo?, pueden utilizar un cuadro para representar la información.

b. ¿Cuál es la longitud del nombre (o nombres) más corto? y ¿Cuál es la longitud del nombre o nombre más largo?

c. ¿Cuál es la longitud que más se repite?, si no fuera un solo valor responder entonces ¿cuáles son las longitudes que más repiten?

d. Representar la información mediante un gráfico de barras.

Sugerencia

Para el desarrollo de la actividad se pueden acatar las siguientes recomendaciones:

a. Se debe velar por la aplicación de conceptos importantes como ordenar y resumir la información.
b. Se aplican los conceptos de máximo y mínimo de un conjunto de datos.
c. Aplicación correcta de la noción de Moda.
d. Uso adecuado de representaciones gráficas.

A otros dos subgrupos se les puede pedir que realicen una actividad similar con el primer y segundo apellido respectivamente.

A los otros tres subgrupos se les pide que realicen esta actividad, para el primer nombre, primer apellido y segundo apellido, pero ahora midiendo la longitud de acuerdo con el número de sílabas en cada caso.

Finalmente, se les pide realizar una presentación de los resultados, por medio de los gráficos de barras. Algunas de las preguntas que se pueden responder son:

- Al medir en letras ¿cuál característica presenta longitudes mayores: el primer nombre, el primer apellido o el segundo apellido? Se debe justificar las respuestas.

- ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior cuando se mide en sílabas? ¿hay consistencia entre las respuestas a las dos preguntas?

- Al medir en letra ¿cuál característica presenta más variabilidad: el primer nombre, el primer apellido o el segundo apellido? Se debe justificar las respuestas. **Conceptos importantes**: (se puede realizar con el recorrido o amplitud (medida de variabilidad) que es igual entre el máximo y el mínimo de letras de la palabra)

- ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior cuando se mide en sílabas?

- Entre las mediciones realizadas en letras y las realizadas en sílabas ¿cuál es más variable? ¿por qué creen que ocurre esto?

Observe que esta es una actividad muy amplia, pero además de vincular dos asignaturas Matemática y Español, permite favorecer la adquisición de la mayoría de habilidades propuestas para el tema de tratamiento de información en el nivel. Esto obliga al docente a seguir muy de cerca la actividad y retomar las respuestas que se generaron para institucionalizar aquellos conceptos que no se hubiesen atendido previamente.

🕘 Para favorecer la lectura de un gráfico en relación con un contexto particular, se puede plantear la siguiente situación a cada estudiante.

La importancia de dormir bien

La importancia del sueño no termina cuando el bebé crece y deja la cuna; es vital también para los niños en edad escolar. Una buena noche de descanso los prepara para el día: los ayuda a lidiar con el estrés social y el ajetreo de la escuela, y también a aprender.

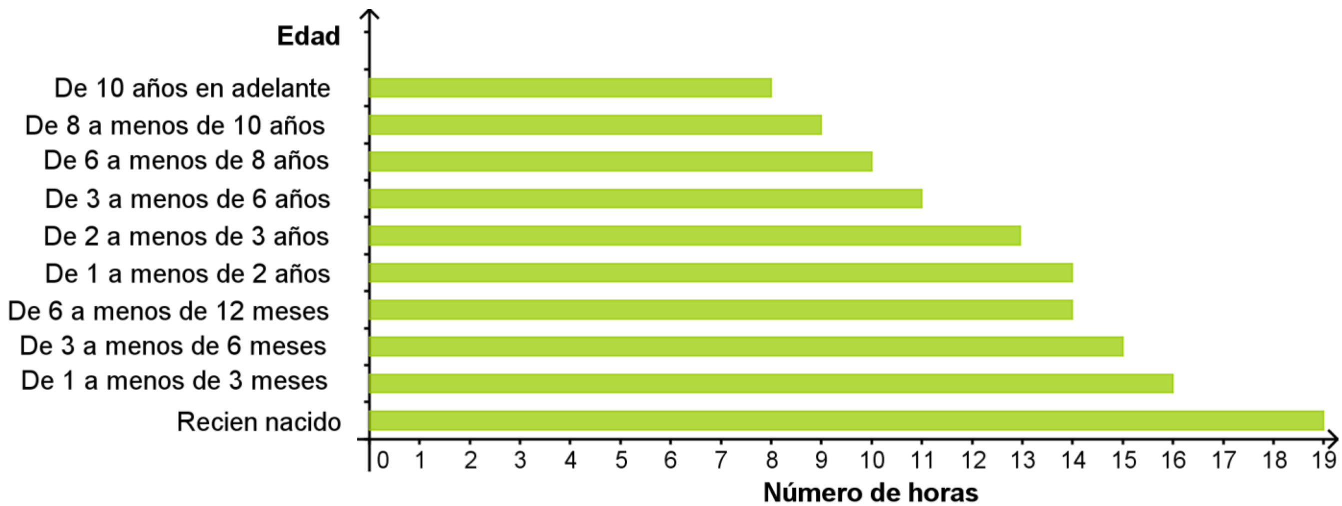
Los niños siempre se han rebelado contra los horarios rígidos para dormir, y más aún hoy con tantas distracciones que los mantienen despiertos y fuera de la cama. La televisión, Internet, los teléfonos y los videojuegos compiten por capturar su atención a la hora de acostarse.

Y aunque creas que tus hijos son los únicos que están corriendo por la casa a las 10 de la noche, lo cierto es que a muchos chicos les cuesta tener un buen descanso nocturno. Algunos de los problemas más comunes que los afectan son: dificultad para conciliar el sueño o para permanecer dormidos, despertarse muy temprano o con sensación de fatiga, y cómo no… las pesadillas.

Tomado de la página de Internet: http://www.materna.com.ar/

De acuerdo con diversos especialistas, el siguiente gráfico representa el número mínimo de horas que debe dormir un niño de acuerdo con su edad.

Número de horas que debe dormir un niño según la Edad



De acuerdo con la información del gráfico

a. ¿Cuántas horas debe dormir un niño que se encuentra en pre-escolar?
b. ¿Cuál es el número de horas mínimo que debe dormir un niño cuando está por ingresar a la escuela?
c. ¿Está usted durmiendo lo necesario?
d. De acuerdo con la lectura ¿qué implicaciones puede tener no dormir una cantidad adecuada de horas?

Solución

Las respuestas a las preguntas anteriores son las siguientes:

a. De 3 a menos de 6 años se debe dormir 11 horas.
b. De 6 a menos de 8 años se debe dormir 10 horas.

La actividad debe cerrar con una plenaria para discutir los resultados de las preguntas planteadas, así como otros aspectos que pueden surgir del análisis realizado.

Uso de historia de las matemáticas

El hueso astrágalo

La presencia del hueso astrágalo de oveja o ciervo en las excavaciones arqueológicas más antiguas, parece confirmar que los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 4 000 años, y la utilización del astrágalo en culturas más recientes, ha sido ampliamente documentada. Existen en las pirámides de Egipto pinturas que muestran juegos de azar que datan del año 3 500 a. C. y Heródoto se refiere a la popularidad y difusión en su época de los juegos de azar, especialmente la tirada de astrágalos y dados. Los dados más antiguos se remontan a unos 3 000 años antes de Cristo y se utilizaron en el juego como en ceremonias religiosas.

Los sumerios y asirios utilizaban un hueso extraído del talón de animales denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas. Los juegos con dados se originaron en los tiempos del Imperio Romano (siendo una de las causas que provocó su caída), aunque no se conoce apenas las reglas con las que jugaban. Uno de estos juegos, denominado "hazard", palabra que en inglés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe "al-azar", que significa "dado".

Fuente: http://www.oei.es/cienciayuniversidad/spip.php?article2118

Elementos sobre evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema en el área de *Estadística y probabilidad*, los cuales recomiendan posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

Pedir a los estudiantes que, para el lanzamiento de una moneda dos veces, determinen:

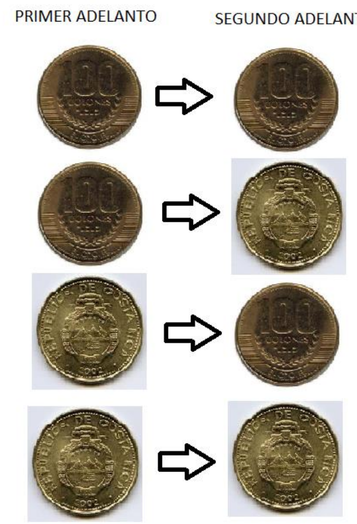
a. Un evento seguro y un evento imposible
b. ¿Cuál evento es más probable: obtener dos escudos u obtener únicamente un escudo?
c. ¿Cuál evento es más probable obtener un escudo u obtener una corona?

Modalidad	**Área**	**Año**	**Habilidades específicas**
Problema	*Estadística y probabilidad*	3er	1. Describir eventos seguros, probables o imposibles según corresponda a una situación particular. 2. Interpretar los conceptos de eventos más probables, igualmente probables o menos probables

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Es importante que el estudiante explore el problema con material concreto, en este caso una moneda de cualquier denominación. Aquí se evaluará, que luego de realizar el experimento varias veces, el estudiante comprenda que al lanzar la moneda en dos ocasiones se pueden observar resultados como por ejemplo escudo- corona, corona-corona, escudo – escudo, corona – escudo.

- *Establecimiento de una estrategia:* Una vez comprendido el problema, es conveniente calificar el tipo de estrategia empleado por el estudiante. En este caso, se deben considerar aspectos como la originalidad, su factibilidad, conexión y belleza. Mostramos a continuación dos posibles estrategias que permiten resolver dicho problema:

Estrategia 1	Estrategia 2
Un estudiante podría realizar una estrategia inductiva (de lo particular a lo general). Él podría decir: Voy a realizar el experimento 30 veces y anotar los resultados. Con base a los resultados obtenidos responderé las preguntas planteadas.	Otro estudiante podría hacer el siguiente esquema: 

Nótese que en la primera estrategia aunque es tediosa es muy válida, ya que relaciona la frecuencia de eventos con el de mayor o menor posibilidad. La segunda estrategia realiza un mayor análisis de los posibles eventos de forma deductiva.

- *Desarrollo de la Estrategia:* Se valora si el estudiante hace un uso adecuado de procedimientos matemáticos para desarrollar la estrategia. En la primera estrategia sería que realice un conteo de los resultados de los 30 experimentos de forma correcta y en la segunda estrategia sería que represente de alguna manera los cuatro casos que pueden suceder. Luego responda las interrogantes planteadas en el problema.

- *Autoreflexión sobre la estrategia:* En este punto se evalúa la pertinencia de la estrategia empleada, por ejemplo en el caso de la primera estrategia el estudiante podría notar que se vuelve muy tedioso su procedimiento. Asimismo, luego de cierta cantidad de experimentos podría notar ciertos patrones y cambiar a la estrategia 2. En ambas estrategias es importante reflexionar si la estrategia elegida me permite responder las interrogantes planteadas.

- *Análisis de los resultados:* Se considera la pertinencia o coherencia de los resultados obtenidos, así como su factibilidad. Por ejemplo, en la primer interrogante un envento seguro sería obtener en alguno de los dos lanzamientos un escudo o una corona y un evento imposible sería obtener en algún lanzamiento una águila o una cruz (solo sería probable si se realizara el experimento con una moneda extranjera), otro evento imposible sería obtener tres coronas o tres escudos ya que son solamente dos lanzamientos.

  Utilizando la segunda estrategia, el estudiante puede concluir para la segunda interrogante que es más probable obtener únicamente un escudo que dos escudos, ya que hay más casos favorables en el primer evento (dos casos) que en el segundo (un caso). Y en la segunda interrogante hay igual probabilidad de obtener un escudo o una corona, ya que tienen igual cantidad de casos favorables.

Utilizando la primera estrategia se espera que los resultados ilustren estas conclusiones, pero no necesariamente se darán. Por esto es importante la supervisión y apoyo del docente.

- *Conclusión:* Es la respuesta al problema planteado.

Situación problema

Esta es una situación de experimentación simple. Se requieren al menos 10 mandarinas, si fuera posible darle una a cada uno de los estudiantes del grupo sería mejor. El propósito es que antes de comerse las mandarinas, para cada una de ellas se cuente el número de gajos y el número de semillas que poseen. Se escogen dos subgrupos, el primero debe recolectar la información sobre gajos y el segundo sobre semillas.

Una vez que hayan recolectado esta información, para el subgrupo que trabaja con mandarinas se solicita:

Deben ordenar los datos y clasificarlos de acuerdo con la cantidad de mandarinas que tiene un número de gajos determinado. Debe preparar la información para completar un cuadro como el siguiente:

Número de gajos por mandarina

Número de gajos	**Número de Mandarinas**
8	2
9	4
⋮	⋮
Total	

a. Seguidamente deben responder las siguientes preguntas:
   i. ¿Cuál es el mayor número de gajos por mandarina que se observó?
   ii. ¿Cuál el menor número de gajos por mandarina que se observó?
   iii. ¿Cuál es el número de gajos más común entre el grupo de mandarinas?
b. Si le dieran una mandarina sin pelar y le preguntaran ¿cuántos gajos se esperaría que tuviera? ¿qué respondería?
c. Al subgrupo que trabajó con la cantidad de semillas se les pide que realicen una actividad equivalente vinculada con esa característica.

Modalidad	**Área**	**Año**	**Habilidades específicas**
Proyecto	*Estadística y probabilidad*	2°	1. Utilizar la experimentación, junto con la observación y la interrogación para recolectar datos. 2. Resumir los datos por medio de cuadros que incluyan frecuencias absolutas. 3. Utilizar la moda, el máximo y el mínimo de un conjunto de datos para resumir e interpretar información. 4. Identificar la variabilidad de los datos como componente básico dentro de los análisis de la información.

Aspectos a evaluar

- *Explorar y comprender la situación problema:* Al dividir al grupo de estudiantes en dos subgrupos, es importante evaluar si cada estudiante tiene claro si le corresponde recolectar la información sobre gajos o la información sobre semillas, para que no haya confusión. Asimismo, es importante evaluar que el estudiante haya pelado las mandarinas con cuidado para no dañar o perder el objeto de información (gajos o semillas) ya que esto indica si tiene claro la actividad de seleccionar y contar según corresponda los gajos o semillas.

- *Diseño de la estrategia que involucra la situación problema:* Lo que se busca evaluar es que los estudiantes ordenen los datos y los clasifiquen de acuerdo con la cantidad de mandarinas que tiene un número de gajos determinado o un número de semillas según corresponda. Para esto se puede utilizar un cuadro como el siguiente

Número de gajos por mandarina

Número de gajos	***Número de Mandarinas***
8	*2*
9	*4*
⋮	⋮
Total	

- *Implementación de la estrategia:* Como se busca completar el cuadro anterior, necesita disponer de la información de todas las mandarinas examinadas. Para esto, se implementará y evaluará el método de interrogación.

- *Análisis de los resultados:* Un primer análisis que se debe hacer de la información resumida tiene que ver con aspectos intuitivos como el mayor, el menor, el más común; esto con el fin de que luego el docente pueda institucionalizar los conceptos de máximo, mínimo y moda, respectivamente. También es importante que el estudiante tome en cuenta esta información para el análisis de la variabilidad de los datos. Además, es importante evaluar las conjeturas que realice el estudiante acerca de la siguiente situación: En una mandarina sin pelar ¿cuántos gajos se esperaría que tuviera? o ¿cuántas semillas se esperaría que tuviera?

- *Comunicación de los resultados y conclusiones:* Los dos subgrupos deben exponer los resultados ante el grupo. Para aprovechar la información, se puede plantear al grupo completo, para las mandarinas con que se trabajó ¿cuál característica es más variable: el número de gajos o el número de semillas? ¿Por qué?

  Luego de que los subgrupos hayan expuesto sus resultados y haya habido una discusión al respecto, el docente debe institucionalizar los conceptos de frecuencia o número de repeticiones, moda o valor más común, el máximo o mayor valor y mínimo o menor valor, todos ellos vinculados con el experimento realizado. Debe indicar a los estudiantes que todos estos valores ayudan para caracterizar el objeto que se está estudiando, en este caso las mandarinas.

Pregunta dirigida

Está técnica metodológica es sumamente importante para favorecer el aprendizaje ya que mediante la interacción entre el docente y los estudiantes, el concepto matemático que se está discutiendo adquiere un mayor significado y favorece el debate. Las preguntas que se formulen deben de mantener una secuencia lógica, construir conocimiento y provocar el razonamiento. Y principalmente deben llevar al estudiante a la institucionalización del concepto que se está desarrollando. A continuación se presenta una situación en la que muestra a manera de ejemplo su implementación en el salón de clase.

Área	Año	Objetivo
Medidas	3°	Estimar correctamente equivalencias entre el litro y sus submúltiplos.

En el aula se desarrolla el siguiente diálogo donde **P** representa la intervención del docente y **E** la intervención del estudiante.

El profesor presenta la siguiente situación problema:

Utilizando materiales concretos como dos envases de medio litro de gaseosa cada uno con agua, una caja de leche vacía, y cuatro cajitas de jugo de 250 ml cada una y llenas, los agrupa como en la siguiente imagen.

Fuente de imágenes: es.123rf.com, themiceshouse.blogspot.com y freepik.es.

P: ¿En cuál de los tres grupos cabe más cantidad de líquido?

E: En las 4 cajitas de jugo. (El estudiante podría contestar equivocadamente al dejarse llevar por la cantidad de envases).

P: ¿Algún grupo tiene la misma capacidad que otro?

E: Todas tienen diferente capacidad.

P: Le solicita al estudiante vaciar el contenido de las botellas en la caja de leche.
P: ¿Tienen o no la misma capacidad?

E: Sí tienen la misma capacidad ya que llenó todo el envase.

P: ¿Cuáles grupos son equivalentes en capacidad?

E: El de las botellas y el de la caja de leche.

P: Le solicita al estudiante vaciar el contenido de los jugos en las dos botellas y vuelve a preguntar ¿Cuáles grupos son equivalentes en capacidad?

E: Todos son equivalentes.

P: ¿Se puede representar la medida del litro con otras medidas de capacidad?

E: Si, 500 ml + 500 ml, o 250 ml + 250 ml + 250 ml + 250 ml

P: ¿Qué otras equivalencias se pueden utilizar para representar un litro?

E: 500 ml + 250 ml y 250 ml + 250 ml + 500 ml

P: Correcto, podemos utilizar los submúltiplos del litro para representar equivalencias entre el litro y ellos, así como también entre submúltiplos.

Segundo ciclo

Segundo Ciclo, Números

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

La metodología utilizada en la enseñanza y aprendizaje de esta área sigue siendo fundamental, pues los conceptos de números ocupan un porcentaje importante en este ciclo.

En este ciclo, se introducen conceptos fundamentales en las matemáticas, tales como: las fracciones, los decimales y la teoría de números, pero sí es importante continuar con el trabajo de cálculo para ir creando en el estudiante fluidez en el cálculo con números y capacidad para usar diferentes herramientas y procedimientos en el cómputo de números.

Métodos

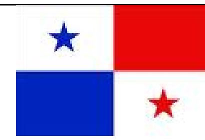
1. A lo largo del ciclo, los conceptos y habilidades de números deben abordarse en estrecha relación con la resolución de situaciones-problema que le permiten al estudiante deducir el concepto que se quiere enseñar.

2. En el Segundo ciclo, el trabajo en equipo resulta enriquecedor, pues en un ambiente colaborativo da la oportunidad de que cada estudiante manifieste las habilidades y destrezas que él domina. También, la competencia es característica de los estudiantes de esta edad por lo que el uso de estrategias tipo “antorcha” o “rally” resulta muy enriquecedora y llamativa para aprender matemáticas.

3. El uso de material recortable, juegos de mesa realizado por los mismos estudiantes, como por ejemplo un bingo para repasar las tablas de multiplicación o un crucigrama son algunos de los materiales que se pueden utilizar en la enseñanza de esta área.

4. En este ciclo se trabaja con cantidades mayores o iguales que 1 000 000, algunos procesos se deben trabajar en lo abstracto. Esto es natural en las matemáticas, pues la abstracción es pieza medular en esta disciplina. Por ejemplo, si en el Primer ciclo se utilizó el ábaco vertical o los bloques de base 10 para la adquisición del concepto de decena o centena, en el Segundo ciclo los conceptos de decenas, centenas de millar o los millardos se pueden trabajar en lo abstracto.

5. Para la enseñanza de la representación gráfica de las fracciones se pueden utilizar como ejemplos algunas banderas de diferentes países. Esto ayuda al estudiante a visualizar las matemáticas en diferentes campos. Algunas de las banderas que se pueden utilizar son:

Holanda	Guatemala	Costa Rica	Ucrania	Panamá
				

Esta actividad debe ser aprovechada por el docente para activar el proceso de conexiones, dada la componente cultural y social del problema.

6. Para la introducción del concepto de potencias (así como de otros conceptos también) es importante que no se empiece dando la definición, si no aprovechar alguna situación en donde es necesaria la utilización del concepto para simplificar alguna expresión. Una opción puede ser ofrecer datos donde se usen números muy grandes o pequeños, pero que su simbología puede ser más sencilla expresándolos en notación científica (sin explicar este término). Por ejemplo

Situación	**Cantidad**	**Notación simple**
La distancia entre la tierra y el sol	142 000 000 000 metros	$1{,}42 \times 10^{11}$metros
Año luz	9400 000 000 000 000 metros	$9{,}4 \times 10^{15}$ metros

Después de analizar estos u otros ejemplos, se institucionaliza el concepto de potencia, se da la definición y notación.

7. En el caso de los números primos, se puede trabajar con dos definiciones, ambas correctas
   a. Un número natural mayor que 1 es primo solo si es divisible por 1 y por el mismo.
   b. Un número natural es primo si tiene solamente dos divisores distintos.
   En ambos casos se puede observar que por definición, el 1 no es primo.

Gestión

Es necesario que la introducción de los conceptos inicie con una situación- problema que puede servir como motivación y como medio de deducción de nuevos conocimientos. La idea es que bajo la guía activa del docente, los estudiantes puedan discutir acerca del problema o situación dado y, finalmente, el docente realice el proceso de institucionalización de los conocimientos que a través de las actividades logren adquirirse.

Un esquema del plan de lección en el que se van a introducir nuevos conceptos podría ser: planteamiento de una actividad o situación problemas, aportes de los estudiantes en torno a la situación o problema planteado, institucionalización del conocimiento, reforzamiento del conocimiento mediante resolución de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes.

Para la resolución de estas situaciones-problema es importante que los estudiantes tengan el tiempo suficiente para la realización de experimentos y conjeturas, así como para poder describir los resultados obtenidos.

Para la formulación de situaciones-problema el docente debe tener cuidado que los datos que se brinden y la respuesta sean reales, de aquí la importancia del rol investigador del docente, que a través de muchas fuentes como el Internet puede obtener datos verdaderos.

Recursos

Como se explicó anteriormente, algunos recursos que se pueden utilizar son los juegos de mesa que pueden ser construidos por los mismos estudiantes.

En este Segundo ciclo se puede introducir el uso de la calculadora a partir de cuarto año, como una herramienta que permita al estudiante concentrarse en los aspectos claves de la resolución de un problema, elaboración de conjeturas y generalidades. Un problema donde se puede aplicar la calculadora para su resolución puede ser:

En el censo del año 2000 se determinó la población de las provincias de Costa Rica, tal como se puede observar en el cuadro siguiente:

Provincias	**Población**
San José	1 356 442
Alajuela	716 935
Heredia	354 926
Cartago	432 923
Guanacaste	264 474
Puntarenas	358 137
Limón	432 923

¿Cuál es la población de Costa Rica, según el censo del año 2000? Si en un censo realizado en el 2005 se determinó que las poblaciones de las provincias de San José, Cartago, Heredia y Cartago tuvieron un aumento de un 15% y en las otras provincias aumentaron en 8%. ¿Cuál es la población de cada provincia en el 2005? ¿Cuál es la población de Costa Rica en el 2005?

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Justifica procedimientos seguidos de manera verbal.
- Identifica conjeturas y determina si estas son falsas.
- Usa y diseña modelos sencillos.
- Utiliza el método de resolución de problemas.
- Realiza explicaciones públicas en forma apropiada.
- Realiza conexiones entre números y tratamiento de la información.
- Utiliza representaciones en relación con la modelización.

Uso de tecnologías

En el Segundo ciclo se puede seguir trabajando en el uso de Internet para el repaso de diferentes habilidades, para lo cual se recomienda ver el uso de tecnología dado en el Primer ciclo.

Se puede introducir el uso de la calculadora sencilla (no necesariamente científica), pues permite disminuir los cálculos rutinarios y concretar esfuerzos en los procesos de razonamiento, de aplicación o realización de conjeturas, procesos que son más significativos para el dominio de las diferentes áreas de las matemáticas.

El uso adecuado de la calculadora prepara al estudiante para un uso apropiado de la calculadora científica en los próximos ciclos. No se puede pretender de ninguna manera que la calculadora sustituya el cálculo mental, ni la resolución a "papel y lápiz" de ejercicios, ni la sustitución de ésta por el trabajo algorítmico de la suma, resta, multiplicación o división.

Por otro lado, antes de usar la calculadora se deben indicar ciertas premisas, por ejemplo:

Recomendaciones

Las tecnologías, desde la calculadora científica hasta el más completo software, lejos de ser un obstáculo para la educación, se pueden convertir en una herramienta poderosa. El usuario es el que determina el uso apropiado o no; ante esto los docentes tienen una tarea enriquecedora, pues muchos estudios han demostrado que el uso eficiente de las tecnologías permite crear espacios de interacción colaborativos y donde hay un aprendizaje significativo.

Varios estudios a nivel nacional han demostrado que cada vez son más los niños y jóvenes que tienen acceso a una computadora e Internet, por lo que hay que aprovechar esta realidad. Sin embargo, la incorporación de la tecnología en el aula debe ir acompañada de la capacitación y actualización del docente.

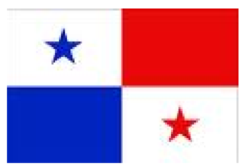
Se insiste en el uso adecuado de la calculadora. No se tiene como objetivo que en este segundo ciclo los estudiantes usen la calculadora para la realización de operaciones básicas y sus algoritmos.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo en el área de números, tenderán a la consolidación de conceptos y algoritmos. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del grado corresponde a reproducción (✇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (🕘).

4° Año

✇ Observe la bandera de Panamá.



El color blanco se puede representar con

a. Una fracción mayor que $\frac{1}{2}$	b. Exactamente $\frac{1}{2}$	c. Una fracción menor que $\frac{1}{2}$

Solución

La opción c es la correcta.

☯ En el supermercado venden diferentes marcas de papas tostadas. La marca "Tostaditas" vende un paquete de 180 gramos a ¢1 400. La marca "Deliciosas" vende un paquete de 250 gramos a ¢1 950 y la marca "Sabrocitas" vende un paquete de 300 gramos a ¢2 350. ¿Cuál de las tres marcas es más rentable comprar considerando su peso y su costo?

Solución

Nos interesa saber cuál es más rentable por lo que se puede calcular: ¿Cuánto cuesta cada gramo de cada uno de los distintos productos? Para esto podemos dividir el costo de cada uno entre su precio en colones.

Tostaditas: $1\ 400 \div 180 = ¢7,78$ cada gramo.
Deliciosas: $1\ 950 \div 250 = ¢7,80$ cada gramo.
Sabrositas: $2\ 350 \div 300 = ¢7,83$ por gramo.

Del cálculo anterior se obtiene que por peso y costo sean más rentables las Tostaditas.

Una maratón consiste en correr 42,195 km. El récord mundial lo tiene un Etíope, el cual la completó en 2 horas 4 minutos 26 segundos. Determine cuántos metros por minuto recorrió en promedio el Etíope.

Solución

Como se quiere la velocidad en metros por minuto entonces se debe pasar la distancia a metros, lo cual corresponde 42,195 km = 42 195 m y el tiempo corresponde a 124,4333 min. Como la fórmula de la velocidad corresponde a

$$v = \frac{d}{t}$$

Así, se tiene que

$$v = \frac{42\ 195m}{124,43min} = 339,097\frac{m}{min}$$

Este tipo de problemas debe apoyar la actitud de perseverancia en el estudiante sin permitir que él copie la respuesta o espere que la misma sea dada por el educador.

5° Año

☺ Considere la siguiente imagen

Fuente: www.nacion.com

Si el dólar tiene un costo de ₡506. ¿Cuál es el costo de los carros en colones?

Solución

a. $\$33\ 500 = 33\ 500 \times 506 = ₡\,16\ 951\ 000$
b. $\$34\ 500 = 34\ 500 \times 506 = ₡\,17\ 457\ 000$
c. $\$39\ 500 = 39\ 500 \times 506 = ₡\,19\ 987\ 000$

☯ Si la maestra desea colocar una reglilla alrededor de la pizarra. ¿Cuántos metros debe comprar? Si el metro de este material cuesta ₡635. ¿Cuánto dinero debe invertir la maestra?

Solución

En esta actividad se puede decir a los estudiantes que midan la orilla de la pizarra (perímetro), y que ese resultado lo redondeen al entero siguiente, pues el material se vende por metros.

Del resultado de la medida de la orilla resulta la cantidad de metros de reglilla que hay que comprar (primera pregunta)

Se multiplica la cantidad de metros por el precio de cada uno para encontrar la inversión que se debe hacer en el material de reglilla.

Un número se llama perfecto si la suma de sus divisores, excepto el mismo, da como resultado el mismo número. Por ejemplo el 496 es un número perfecto. ¡Compruébelo! Determine 2 números perfectos menores que 100. Investigue en Internet algunos otros números perfectos.

Solución

Los divisores de 496 son: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248. Luego si realizamos la suma obtenemos 496, con lo cual cumple con ser número perfecto. Otros números perfectos menores que 100 son: 6 y 28.

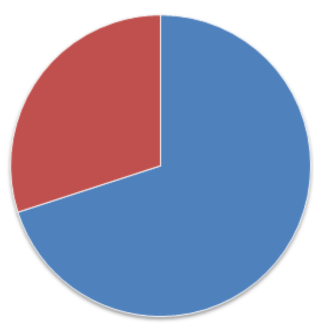
Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de confianza en la utilidad de la matemática.

6° Año

Considere la siguiente figura

¿Qué parte del círculo es de color azul?

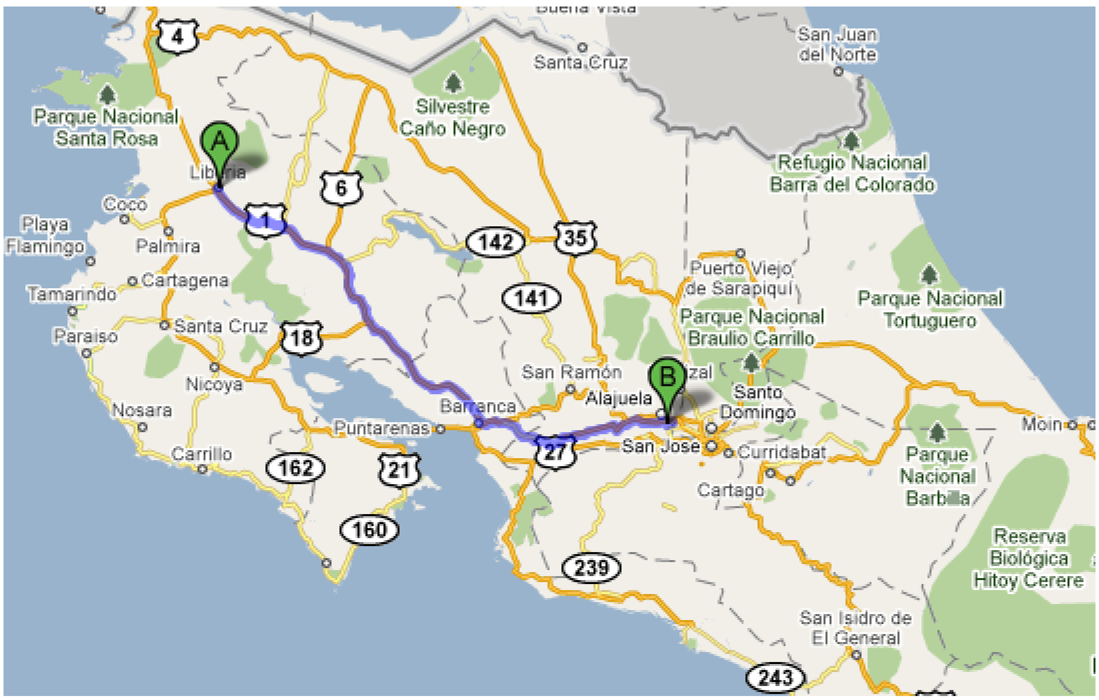
a. Entre 0 y $\frac{1}{4}$.
b. Entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$.
c. Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.
d. Entre $\frac{3}{4}$ y 1.



Solución

La opción correcta es la c.

☯ Considere el siguiente mapa, tomado de google maps, que se encuentra a una escala 1: 5 000 000. La marca en azul es la ruta que se debe de tomar para ir de Liberia a Alajuela. ¿Qué distancia hay entre estos dos puntos en kilómetros?



Fuente: http://maps.google.com

Sugerencia

La idea en este ejercicio es que el estudiante utilice un hilo o material semejante, lo coloque sobre la línea morada, mida la cantidad de centímetros que ocupo de hilo y por último utilice la escala que se le proporcionó.

El alumno de resolver la razón $1:5\ 000\ 000 :: \_\_ : x$, luego debe pasar el resultado a kilómetros dividiendo por 100 000.

¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre los números 8^2 y 2^8?

Solución

Se tiene que

$$8^2 = 64$$

Luego

$$2^8 = 256 = 16^2$$

Así, entre 8 y 16 hay 7 números, entonces hay 7 cuadrados perfectos.

El primer y segundo problemas de 6° Año, deben apoyar la actitud de respeto, aprecio y disfrute de la matemática; el tercer problema de este año debe apoyar la actitud de perseverancia.

Comentarios sobre los problemas

Particularmente, en el área de números, muchos problemas están asociados al nivel de complejidad de conexión, pues esta área es muy amplia y es natural utilizar números y sus operaciones para la resolución de situaciones en otras áreas de la matemática.

Es importante que los estudiantes le dediquen el tiempo suficiente a la resolución de los problemas, pues necesitan leer, analizar, plantear, resolver y dar conclusiones.

En teoría de números se pueden encontrar muchos problemas de reflexión. Como el caso del número perfecto, pero existen otras propiedades que cumplen ciertos números que se pueden aprovechar en el planteamiento de problemas.

Uso de historia de las matemáticas

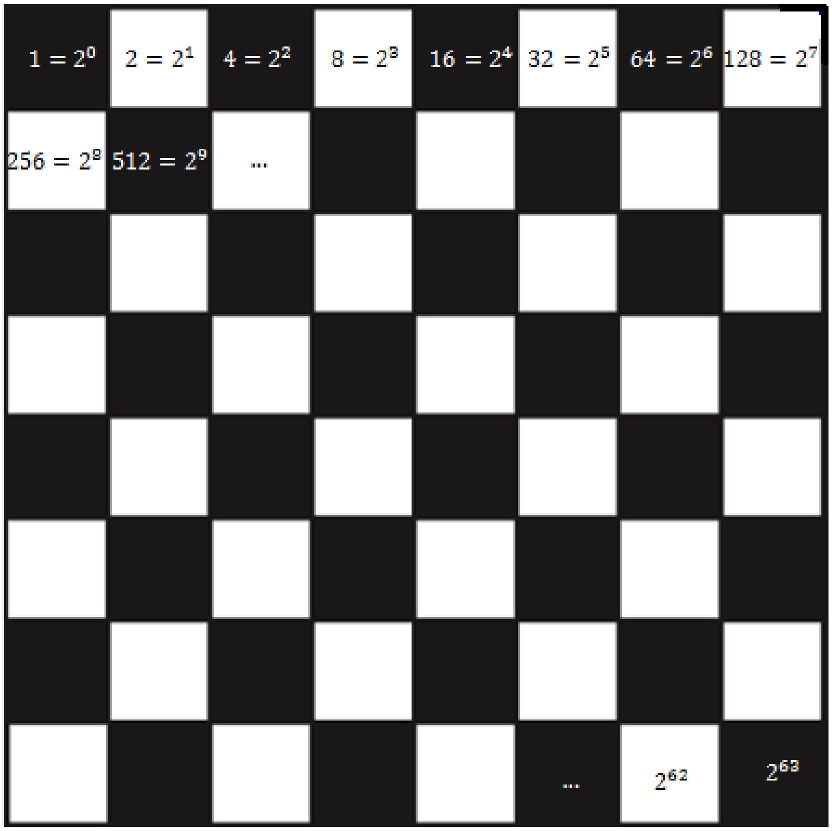
Anécdota: Historia del Ajedrez

En este Segundo ciclo se pueden aprovechar la situación sobre los diferentes sistemas de numeración analizada en el Primer ciclo, pero se puede aprovechar para analizar las operaciones (suma y resta) en estos sistemas, con el objetivo de que los estudiantes se concienticen sobre las ventajas del sistema de numeración decimal que se utiliza.

Por otro lado, la historia del ajedrez resulta interesante, y se puede utilizar como anécdota histórica pero también para introducir el concepto de potencia que se analiza en sexto año. El siguiente texto es un extracto del libro "*El hombre que calculaba*" de Malba Tahan:

> Aceptaré pues la recompensa que ofrecéis por el juego que inventé. La recompensa habrá de corresponder a vuestra generosidad. No deseo, sin embargo, ni oro, ni tierras, ni palacios. Deseo mi recompensa en granos de trigo. -¿Granos de trigo?, exclamó el rey sin ocultar su sorpresa ante tan insólita petición. ¿Cómo voy a pagarte con tan insignificante moneda? -Nada más sencillo, explicó Sessa. Me daréis un grano de trigo para la primera casilla del tablero; dos para la segunda; cuatro para la tercera; ocho para la cuarta; y así, doblando sucesivamente hasta la sexagésima y última casilla del tablero. Os ruego, ¡oh rey!, de acuerdo con vuestra magnánima oferta, que autoricéis el pago en granos de trigo tal como he indicado…
>
> -¡Insensato!, exclamó el rey. ¿Dónde aprendiste tan necio desamor a la fortuna? La recompensa que me pides es ridícula…Pero, en fin, mi palabra fue dada y voy a hacer que te hagan el pago inmediatamente de acuerdo con tu deseo. Mandó el rey llamar a los algebristas más hábiles de la corte y ordenó que calcularan la porción de trigo que Sessa pretendía. Los sabios calculadores, al cabo de unas horas de profundos estudios, volvieron al salón para someter al rey el resultado completo de sus cálculos. El rey les preguntó, interrumpiendo la partida que estaba jugando: - ¿Con cuántos granos de trigo voy a poder al fin corresponder a la promesa que hice al joven Sessa? -¡Rey magnánimo! Declaró el más sabio de los matemáticos…el trigo que habrá que darle a Lahur Sessa equivale a una montaña que teniendo por base la ciudad de Taligana se alce cien veces más alta que el Himalaya…

En efecto, si se realizará el pago solicitado por Sessa, se tendría que realizar los siguientes cálculos:



De ese modo, sólo por la casilla número 64 habría que pagar

$$2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808 \text{ granos}$$

quedando pendiente la suma de cada una de las otras 63 casillas.

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

Segundo ciclo, Geometría

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

El abordaje inicial de los contenidos y habilidades geométricas en este ciclo debe hacerse en relación con lo concreto, utilizando diversos materiales. Sin embargo, este material no solamente servirá para reconocer figuras, sino también como medio de experimentación para establecer relaciones geométricas básicas. También podrán trazar figuras geométricas utilizando instrumentos.

Esto permitirá en los estudiantes un mayor grado de abstracción en el conocimiento de los conceptos geométricos y los preparará para un estudio de la geometría de modo más formal.

Se pretende que al finalizar este ciclo, los estudiantes puedan utilizar instrumentos para realizar trazados sencillos, tener un buen conocimiento acerca de los triángulos y cuadriláteros, calcular perímetros y áreas de figuras geométricas, identificar y clasificar cuerpos sólidos y calcular algunos volúmenes, determinar algunas simetrías y tener una noción básica inicial con respecto al uso de coordenadas.

Métodos

1. En el aspecto metodológico se sugieren actividades que permitan la experimentación con contenidos geométricos. Por ejemplo, para investigar relaciones con áreas puede utilizarse material recortable; también, el uso de software de geometría dinámica es una herramienta útil para la experimentación geométrica.

2. En este ciclo es central el sentido espacial, esto implica la manipulación, la construcción y el trazado de figuras, visualizándolas en diferentes perspectivas o posiciones.

3. Es importante repasar los conceptos y habilidades adquiridos en el ciclo anterior mediante problemas que además se relacionen con los nuevos conocimientos.

4. También se recomienda la resolución de problemas como una metodología que permite la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes.

5. Es importante la participación de los estudiantes en la pizarra o mediante exposiciones orales con el propósito de fortalecer el proceso de comunicación y argumentación.

6. Cuando se trazan dibujos geométricos para ilustrar conceptos o relaciones generales, hay que tener cuidado de que las figuras no sigan un patrón determinado para no inducir en el estudiante reglas que no necesariamente son correctas.

7. Metodológicamente es importante recurrir a aspectos de la historia de la matemática: anécdotas, biografías, desafíos.

8. Es importante que el estudiante redacte utilizando especialmente el lenguaje natural y algunos elementos del lenguaje matemático y la simbología en su argumentación.

Gestión

Al igual que en el primer ciclo, es necesario que se planifique con cuidado el uso de los recursos, los tiempos asignados a las actividades y a la institucionalización.

Recursos

Algunos recursos que se pueden utilizar son: tangrama, doblado de papel, cubo soma, geoplano, materiales recortables, objetos de la vida cotidiana (empaques de Tetra Brick, cajas, bolas, etc.), instrumentos como regla, compás y transportador, software de geometría dinámica.

Procesos

Los procesos en los cuales se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Justificación de procedimientos seguidos de manera verbal o pictórica.
- Usar modelos sencillos de situaciones.
- Explicación de resultados de manera oral y pictórica.
- Identificar definiciones de manera sencilla.
- Introducir conjeturas y buscar si son ciertas.
- Usar métodos de resolución de problemas.
- Uso de apoyos para la comunicación adecuada al nivel
- Conexión entre geometría y medidas
- Representación gráfica, tabular, etc. de objetos geométricos.
- Representar figuras geométricas en distintas posiciones

Uso de tecnologías

En este ciclo se puede seguir trabajando en el uso de Internet para el repaso de diferentes habilidades. El tutorial dado en la parte de uso de tecnologías para *Números* en el Primer ciclo contribuye a este fin.

Con respecto al uso del software, se pueden introducir programas de geometría dinámica. Es idóneo el uso de software matemático en tres dimensiones, para ayudar al estudiante a tener una mejor visualización de las características de los cuerpos sólidos.

Recomendaciones

El uso de software con enfoque geométrico, lejos de ser un obstáculo para la educación, se pueden convertir en una herramienta poderosa. El usuario es el que determina el uso apropiado o no; ante esto los docentes tienen una tarea enriquecedora, pues muchos estudios han demostrado que el uso eficiente de las tecnologías permite crear espacios de interacción colaborativos y donde hay un aprendizaje significativo.

Varios estudios a nivel nacional han demostrado que cada vez son más los niños y jóvenes que tienen acceso a una computadora e Internet, por lo que hay que aprovechar esta realidad. Sin embargo, la incorporación de la tecnología en el aula debe ir acompañada de la capacitación y actualización del docente.

Por otro lado, algunas veces se cree que utilizar la tecnología supone tener un laboratorio disponible donde haya una computadora por estudiante. Bajo esta premisa el uso de las tecnologías de la información y comunicación estaría muy limitado. Con sólo una computadora portátil y un retroproyector se pueden realizar diversas actividades donde se puede explotar la visualización y crear espacios de discusión que lleven a un aprendizaje significativo.

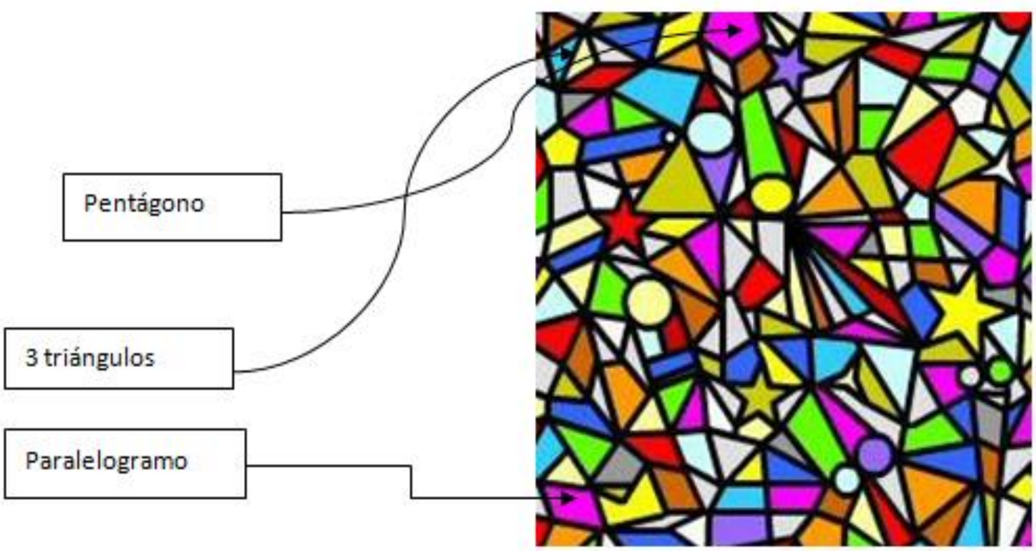
Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo tenderán a la adquisición de conceptos básicos sobre las figuras geométricas. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del grado corresponde a reproducción (✇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (🕘).

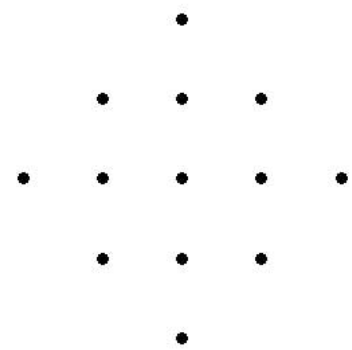
4° Año

✇ En el mosaico que representa la figura adjunta, señale tres triángulos, tres cuadriláteros, un paralelogramo, un pentágono.

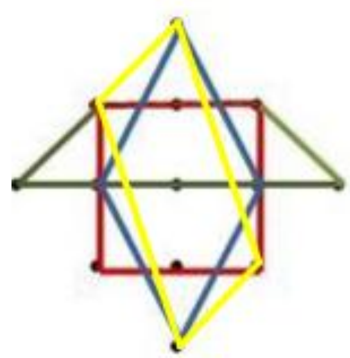
Solución



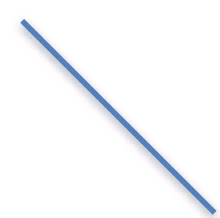
☯ Utilizando puntos del siguiente diseño como vértices, trace en color rojo un cuadrado, en color verde un trapecio, en color azul un rombo y en color amarillo un paralelogramo que no sea ni cuadrado ni rombo.



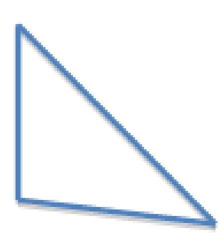
Solución



🕘 Mediante el uso de regla y compás y utilizando el siguiente segmento como base, trace un triángulo isósceles que no sea equilátero ni rectángulo.



Solución



5° Año

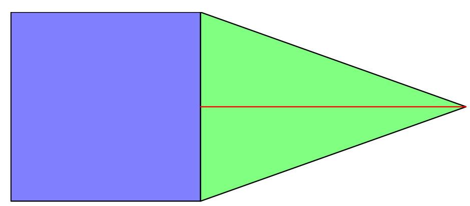
✇ ¿Cuántos objetos de forma cilíndrica y cuántos con forma de prisma pueden identificarse en la figura?

Solución

Hay 8 objetos cilíndricos y 6 prismas

Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de autoestima en relación con el dominio de las matemáticas.

☯ La figura está compuesta por un cuadrado (azul) de lado 5 cm y un triángulo isósceles (verde), el segmento rojo mide 8 cm, ¿cuánto mide el área de la figura completa?



Solución

El área del cuadrado es

$$A = l \times l = 5 \times 5 = 25$$

El área del triángulo es

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{5 \times 8}{2} = 20$$

Así el área total es la suma de los dos, por lo tanto corresponde a 45 cm^2.

🕘 Doña Teresa quiere cercar con tres hilos de alambre una parcela cuadrada de 12 m de lado; también quiere sembrarla de zacate, ¿cuánto alambre requiere?, ¿cuántos metros cuadrados de zacate necesita?

Solución

Como necesita cercar con tres hilos de alambre a cada lado de la parcela ocupa

$$12 \times 3 = 36\ m$$

así para toda la parcela ocupa

$$36 \times 4 = 144\ m$$

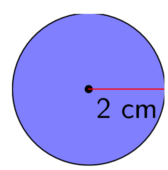
También, se puede buscar primero el perímetro y luego multiplicarlo por 3.

Con respecto a la cantidad de zacate, se necesita conocer el área, la cual corresponde a

$$A = l \times l = 12 \times 12 = 144\ m^2$$

6° Año

✇ Calcule el área y el perímetro del círculo dado en la figura.



Solución

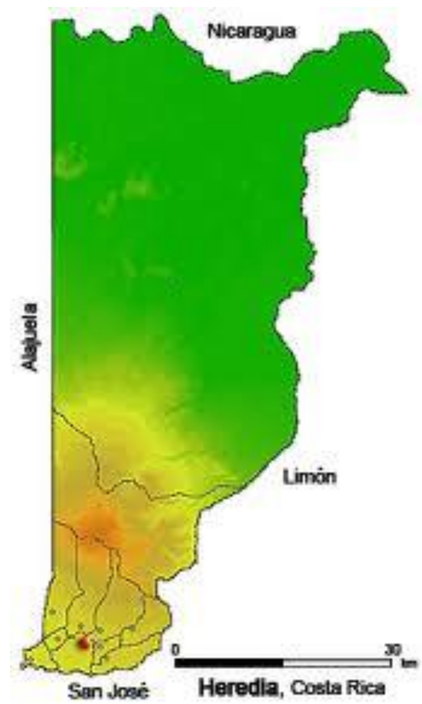
El área y el perímetro del círculo están dados por

$$A = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 = 4 \times \pi$$

$$P = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 2 = 4 \times \pi$$

Curiosamente, para *r* = 2 el área y el perímetro del círculo son iguales a $4 \times \pi$ lo cual equivale aproximadamente a 12,56 cm^2.

☯ Se adjunta un mapa de la provincia de Heredia, con indicación de la escala. Estime la extensión territorial de dicha provincia.



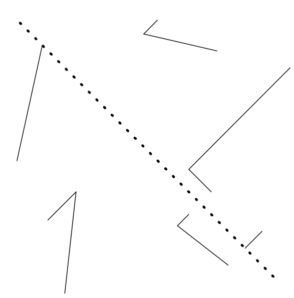
Sugerencia

El estudiante debe ser creativo para establecer la estrategia que adoptará para resolver el problema.

Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de perseverancia puesto que no es un problema común y a la vez la confianza en la utilidad de la matemática.

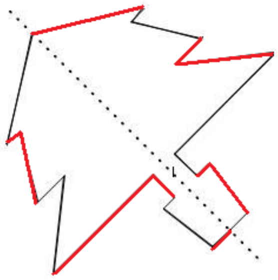
En este problema se debe hacer hincapié en los procesos de resolución de problemas, conexiones con otras áreas (Estudios Sociales) y las representaciones.

◷ La línea de puntos es un eje de simetría de una figura de la cual se dan algunos trazos. Complete la figura.



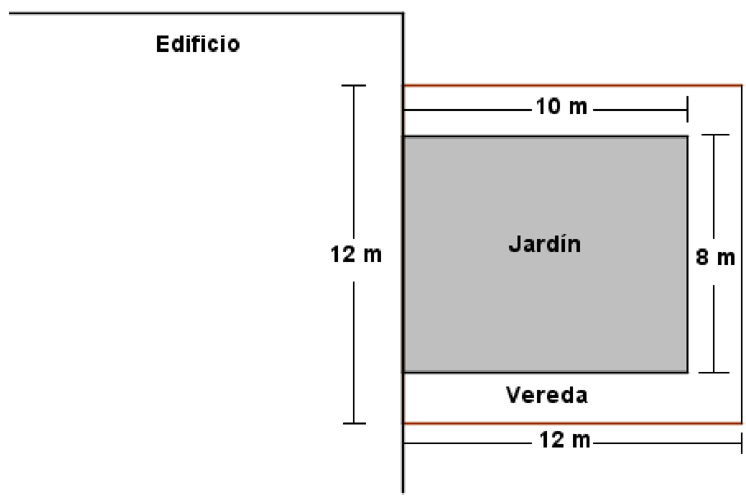
Solución

La siguiente figura muestra los trazos necesarios para completar correctamente la figura.



El siguiente problema puede ser utilizado para activar el proceso de contextualización.

Ayuda a la junta directiva de tu Institución a obtener un presupuesto, para cubrir de cerámica, una vereda (corredor) que rodea tres lados del jardín de tu escuela. Suponga que el metro cuadrado de cerámica que desean comprar los miembros de la junta tiene un costo de ¢9 800. ¿Cuál es el costo del proyecto?



Solución

Es claro que hay que desarrollar primero procesos de visualización para distinguir por un lado que la vereda está compuesta de regiones rectangulares y segundo para determinar la medida del ancho de la vereda, la cual mide 2 cm. Se procede a calcular área de cada pasillo

$$\boxed{\begin{array}{l} A_1 = 10 \times 2 = 20\ m^2 \\ A_2 = 10 \times 2 = 20\ m^2 \\ A_3 = 12 \times 2 = 24\ m^2 \end{array}}$$

Finalmente se suman estos tres resultados, con lo cual se necesitan 64 m^2. Luego el costo será de

$$9\ 800 \times 64 = ¢\ 627\ 200$$

Observaciones: El educador puede adaptar el problema para que corresponda a un espacio físico que corresponda a la Institución del alumno. Se puede proponer una actividad en donde el grupo vaya a la zona de interés y manipule objetos como cintas métricas, cuerdas, escuadras, etc. Otra actividad muy provechosa es la realización de maquetas a escala de la zona de interés con material concreto (cartón, madera, otros).

Comentarios sobre los problemas

Los problemas propuestos pueden servir como reforzamiento o para introducir conceptos. Por ejemplo, el segundo problema de 6°Año puede servir como actividad para introducir la estimación de áreas de polígonos, así como el concepto de escala.

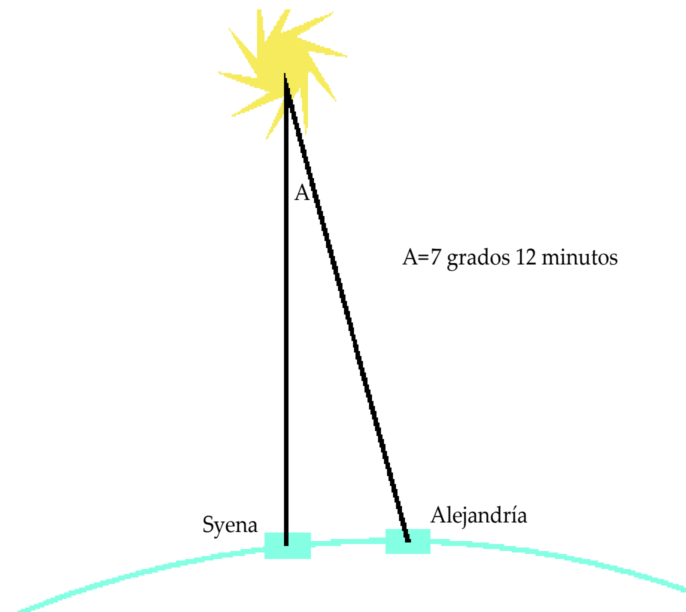
Aquí se pueden utilizar diferentes métodos para realizar la estimación; puede plantearse a los alumnos el problema de la estimación y luego comentar y comparar los métodos utilizados. Puede hacerse una clasificación de los mismos.

La actividad puede servir como un juego en el que se divide la clase en grupos y gana el grupo que mejor estime el área (oficialmente la extensión territorial de Heredia es 2656 km^2.

Algunos de los ejercicios propuestos requerirán de algunos comentarios y aclaraciones por parte del docente, también pueden servir como repaso o como un medio de comentar asuntos relacionados con ellos.

Uso de historia de las matemáticas

Problema: Eratóstenes y el radio terrestre



Eratóstenes nació cerca del año 276 a. C. y murió cerca del año 194 a. C. Es famoso porque logró dar una medida bastante acertada del radio de la Tierra. Usó, desde luego, un método indirecto. Él se dio cuenta de que a mediodía del día de solsticio de verano el Sol alumbraba directamente en vertical el fondo de un poso muy profundo en la localidad de Syena (en el actual Egipto).

Al mismo tiempo, en la ciudad de Alejandría, localizada aproximadamente en el mismo meridiano y a 5 000 estadios (un estadio es aproximadamente 185 m) al Norte de Syena, la sombra que proyectaba el sol indicaba que la distancia angular del Sol al cenit era de un 1/50 de un círculo completo (aproximadamente 7 grados con 12 minutos).

Esto le permitió saber que la circunferencia de la Tierra es 50 veces la distancia entre Syena y Alejandría. De acuerdo con las mediciones de Eratóstenes, ¿cuánto mide el radio de la Tierra?

El problema que resolvió Eratóstenes puede servir, además, para realizar conexiones con la geografía.

Anécdota: La muerte de Arquímedes y la relación cilindro-esfera

Arquímedes de Siracusa vivió del año 287 al año 212 a. C. Fue un gran pensador y matemático y, además, inventó varios artefactos.

Demostró que si se tiene un cilindro y una esfera inscrita en él, entonces tanto las superficies como los volúmenes de estos cuerpos sólidos están en razón 3:2. Se sentía muy satisfecho por esto y pidió que a su muerte se grabara en su tumba una esfera con un cilindro circunscrito.

Parece que este deseo se le cumplió a la edad de 75 años. Un día Arquímedes estaba muy concentrado estudiando una figura geométrica que había dibujado en la arena. Uno de los soldados romanos que habían invadido Siracusa le pidió varias veces que lo acompañara; sin embargo, Arquímedes no le hizo caso, por lo que el soldado sacó su espada y lo mató.

La pirámide de Khéops

Se atribuye a Thalés (600 años antes de nuestra era) la introducción en Grecia de la geometría egipcia. Thales fue un precursor preocupado por problemas prácticos como el cálculo de las alturas de monumentos con la ayuda de un bastón y de la proporcionalidad de las sombras. Él calculo la altura de la pirámide de Khéops midiendo su propia sombra. *"En el momento en que mi sombra será igual a mi tamaño, la sombra de la pirámide será igual a su altura."*



Elementos de evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema en el área de *Geometría*, los cuales recomiendan posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

La maestra les solicitó a sus estudiantes que anotaran el siguiente problema en su cuaderno y les facilitó el material necesario para resolverlo:

Laura debe trazar un cuadrado de catorce unidades de lado en una hoja cuadriculada. Luego debe recortarlo por el borde y calcular la medida de su superficie. Por último debe cortar la figura por una de sus diagonales y contestar las siguientes preguntas registrando en su cuaderno en forma ordenada las estrategias utilizadas:

¿Cuál es la medida del área del cuadrado?
¿Cuál es la medida del área de uno de los triángulos?

Modalidad	**Área**	**Año**	**Objetivo**
Problema	*Geometría*	5°	Identificar la noción de área.

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Se toma en consideración el análisis por parte de cada estudiante de la estrategia a utilizar como de los materiales que requiere para llevarla a cabo.

- *Establecimiento de una estrategia:* Se evalúa la originalidad de cada estudiante para aplicar una estrategia tomando en cuenta la factibilidad, conexión y belleza. Se evalúa la originalidad del estudiante para presentar su trabajo en el cuaderno, el buen gusto para realizarlo y la estrategia utilizada.

- *Desarrollo de la estrategia:* Evaluar el uso correcto del material utilizado y la factibilidad de los procedimientos aplicados. En este caso, si pudo deducir la fórmula o si contó el total de unidades dentro de la figura trazada. Además, se evalúa la exactitud y nitidez de los trazos realizados.

- *Autoreflexión sobre la estrategia:* Se evalúa si la estrategia utilizada fue la más indicada, si fue clara y si la misma es aplicable para otros ejemplos similares.

- *Análisis de los resultados:* Se toma en consideración si los resultados obtenidos responden a la pregunta planteada además de la factibilidad.

- *Conclusión:* Se evalúa que la respuesta dada contenga los elementos necesarios que solucionan el problema planteado.

Segundo Ciclo, Medidas

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

Dadas las características de esta área, los contenidos y habilidades seguirán ligados con lo concreto. Esto lleva al uso de materiales concretos y diversos instrumentos de medición. Además, se profundizará en el cálculo y estimación de medidas y en su uso en situaciones reales o ficticias.

Se pretende que al finalizar este ciclo los estudiantes tengan una comprensión cabal del concepto de medición y puedan realizar, estimar y comparar mediciones con mayor precisión que en el ciclo anterior.

Métodos

1. Los métodos que se deben utilizar en este ciclo serán semejantes a los del ciclo anterior pero profundizando en cuanto a la complejidad de las actividades.

2. Es posible que en el Primer ciclo aún no sea del todo claro el sentido de las operaciones de conservación y de transitividad. En este ciclo esto debe retomarse y se deben proponer actividades que refuercen este aspecto.

3. Es necesario que el educador enfatice que medir es comparar con respecto a un patrón (unidad de medida) y que este patrón puede ser arbitrario y de carácter social. La historia del sistema métrico decimal, por ejemplo, es útil para hacer este énfasis.

4. A este nivel puede realizarse actividades de medición en el contexto de pequeños proyectos para ser realizados en la casa. Por ejemplo, elaborar la receta de un pastel y el presupuesto para hacerlo (implica datos de peso, temperatura, moneda, volumen, tiempo y relaciones entre ellos). Otro proyecto útil es investigar qué unidades de medidas se utilizaban en Costa Rica.

5. El estudiante puede fabricar diferentes instrumentos de medición.

6. Se debe utilizar la calculadora como una herramienta para simplificar el trabajo de cálculo.

Gestión

El educador debe tomar tiempo para preparar materiales para llevar a la clase y debe planificar actividades de manipulación. Debe considerar tiempo para realizar actividades de medición fuera del aula.

Recursos

Algunos recursos que se pueden utilizar: cartulina, palillos, diversos objetos (como piedras, bolinchas, etc.), instrumentos como pesas, termómetros, relojes, calculadora.

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Proposición de modelos sencillos.
- Uso de resolución de problemas.
- Conexión especial entre medidas y geometría.

Uso de tecnologías

En este ciclo se puede seguir trabajando en el uso de Internet para el repaso de diferentes habilidades. El pequeño tutorial dado en el Primer ciclo funciona para este ciclo, pues simplemente sería buscar las actividades correspondientes.

Se puede introducir el uso de la calculadora sencilla (no necesariamente científica), pues permite disminuir los cálculos rutinarios y concretar esfuerzos en los procesos de razonamiento, de aplicación o realización de conjeturas, procesos que son más significativos para el dominio de las diferentes áreas de las matemáticas.

La tecnología se puede utilizar para que a través de problemas se les dé un sentido práctico a las matemáticas. Los procesos asociados a estos problemas son: conexiones y resolución de problemas y modelización. Además el nivel de complejidad es de conexión pues enlaza esta área con el área de números.

Área	**Año**	**Tecnología utilizada**	**Problema**	**Comentarios**
Medidas	4°	Calculadora	En los carros el kilometraje o el millaje marcan la cantidad de kilómetros o millas, respectivamente, que ha recorrido un carro. Si Andrea quiere comprar un carro, ya observó dos carros y ambos le gustan. El primer carro, que fue traído de Estados Unidos marca un millaje de 83 325 y el segundo auto el kilometraje marca 124 322. ¿Cuál carro tiene mayor kilometraje?	Si se desea realizar esta actividad como un trabajo de investigación entonces, parte de ésta es que busquen la conversión respectiva de millas a kilómetros. Si se realiza en la clase se les da el dato. $1\ Milla = 1\ 609{,}34\ m$
Medidas	5°	Internet	Con ayuda de *Google maps* (http://maps.google.com/) determine cuántos kilómetros hay entre su cantón y la Basílica de Los Ángeles en Cartago. Si una persona promedio camina 6 Km en una hora. ¿Cuánto tiempo se tardaría realizar el trayecto de su cantón a la Basílica?	Este problema puede ser usado como un pequeño proyecto extraclase. El docente debe realizar con anterioridad la actividad para poder responder a posibles cuestionamientos de los estudiantes y para poder guiarlos en el proyecto. Esta es solo una actividad donde se utiliza los mapas virtuales de google. Esta herramienta puede ser utilizada en otras áreas de la matemática o de otras materias.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo tenderán a la adquisición del concepto de medida, realizar mediciones y estimar y comparar medidas. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del grado corresponde a reproducción (✇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (🕘).

4° Año

✇ Para hornear un queque se necesita que el horno esté a una temperatura de 180º Celsius. Su papá tiene un horno graduado en grados Fahrenheit. Dígale a su papá cuántos grados Fahrenheit necesita para hornear el queque.

Solución

Pasar de grados Celsius a Fahrenheit:

$$C \times \frac{9}{5} + 32 = F$$

Así, 180° equivalen a

$$180 \times \frac{9}{5} + 32 = 356^{o}F$$

☯ El piso de un cuarto mide 3 m de ancho por 4 m de largo. Se quiere cubrir con losas cuadradas que miden 6 dm^2, ¿cuántas losetas se necesitan para cubrir el piso?

Solución

El área a cubrir es 12 m^2, es decir 1200 dm^2. Dividimos el área del cuarto entre el área de la losa, obteniendo 200 losas.

⌚ Un niño entre 9 y 13 años necesita consumir 12 mg de vitamina B3 (Niacina) al día. En la siguiente tabla se presentan algunos alimentos y la cantidad de Niacina que contienen.

Alimento	**Cantidad de alimento**	**Niacina (en mg)**
Arroz blanco común, cocido	1 taza	2,32
Salmon fresco, cocido	150 gr	10,33
Aguacate	30 gr	0,54
Huevo entero, crudo	1	0,03
Maní	30 gr	3,80
Papa horneada	1 (150gr)	2,17

Elabore dos menús que tengan al menos tres de estos alimentos cada uno que cubran la cantidad de Niacina que necesita un niño de 10 años diariamente. El menú puede contener un poco más de la niacina necesaria, a lo sumo 1,5 mg de exceso.

Sugerencia

Salmon fresco, cocido, una papa horneada y un aguacate. Si sumamos la cantidad de niacina esta corresponde a 13,04 mg, lo cual está dentro lo requerido para un niño de 10 años.

Estos tres problemas pueden ser utilizados para apoyar la actitud de confianza en la utilidad de la matemática y autoestima en relación con el dominio de la matemática.

En estos problemas se debe hacer hincapié en los procesos de resolución de problemas, modelización y conexiones con otras áreas (ciencias).

5° año

☸ ¿Cuántos decilitros se requieren para llenar un recipiente de 5,5 litros de capacidad?

Solución

Se tiene que 10 decilitros equivalen a un litro, así se ocupan

$$10 \times 5,5 = 55\ dl$$

☯ Una ensalada requiere de ½ kg de pepino, 750 g de tomate, 1 lechuga criolla y 100 g de zanahoria rallada, 50 g de cebolla. La siguiente tabla proporciona los precios de estos ingredientes.

Ingrediente	**Precio en colones**
Tomate	¢650 el kg
Cebolla	¢1 000 el kg
Lechuga	¢250 la unidad
Zanahoria	¢350 el kg
Pepino	¢700 el kg

¿Cuánto cuesta el total de los ingredientes para la ensalada?

Solución

- $\frac{1}{2}$ kg de pepino vale $\frac{1}{2} \times 700 = ¢350$
- 750 g de tomate vale $0,750 \times 650 = ¢487,5$
- 1 lechuga criolla vale $¢250$
- 100 g de zanahoria vale $¢35$
- 50 g de cebolla vale $0,05 \times 1\ 000 = ¢50$

Luego sumando obtenemos el total del costo, que corresponde a ¢1 172,5.

Modifique el rectángulo de modo que la figura resultante tenga el mismo perímetro pero menos área.

Sugerencia

El estudiante debe transformar la figura en un paralelogramo y darse cuenta que el perímetro se conserva, mientras que el área se reduce. Podría ser valioso el uso de un software de geometría dinámica. Se puede aceptar como solución un rectángulo de dimensiones distintas.

6° Año

¿Caben 28 litros de agua en un cubo que tiene 32 cm de arista?

Solución

Se tiene que el volumen del cubo es

$$V = a^3 = 32^3 = 32\ 768\ \text{cm}^3$$

Dado que 1 litro equivale a 1 dm^3 = 1 000 cm^3, esto nos asegura que la caja tiene una capacidad de más de 32 litros, por lo cual la respuesta es afirmativa.

Utilizando las denominaciones de billetes que se utilizan en Costa Rica, ¿de cuántas maneras se pueden pagar ¢52 000?

Solución

El docente puede solicitarle al estudiante para realizar esta actividad, billetes del juego de mesa llamado “gran banco” o puede solicitar al estudiante que los fabrique con papel reciclado. De esta forma la actividad resultará más agradable para el alumno.

Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud de autoestima en relación con el dominio de la matemática.

🕘 Suponga que se tiene 24 cubitos de 1 cm^3 cada uno.

a) Dibuje en papel cuadriculado todos los prismas rectos rectangulares posibles usando cada vez todos los cubitos. ¿Cuántas posibilidades hay?
b) Si el número de cubos es 32. ¿Cuántas posibilidades hay?
c) ¿Es posible encontrar un número de cubitos para el cual exista una única posibilidad de disponerlos?

Sugerencia

Este tipo de actividades se presta para la realización en grupos, donde el estudiante intercambie ideas sobre las posibles estrategias para resolver el ejercicio. Además, se deben propiciar los espacios para que el alumno exponga sus resultados.

💡 Este problema puede ser utilizado para apoyar la actitud participación activa y colaborativa.

Uso de historia de las matemáticas

Situación: El sistema métrico en Costa Rica

Las primeras unidades para medir longitudes estaban referidas a partes del cuerpo humano: codo, pie, pulgada, etc. Posteriormente se fueron introduciendo otro tipo de unidades de medición. Sin embargo, en algún momento se llegó a una gran diversidad de unidades de medición; esto desde luego, acarrea una serie de problemas, en particular en lo que se refiere a transacciones comerciales.

Algunos reinos intentaron introducir sistemas de medición únicos, así aparece, por ejemplo, la libra de peso de marco como unidad de masa en Francia; sin embargo, persistían las diferencias de un reino a otro.

En 1791 la Asamblea Constituyente en Francia solicitó a la Academia de Ciencias francesa la elaboración de un sistema nacional de medidas. Como resultado de esto, se propuso un sistema de medidas basado en el metro cuya longitud sería la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Este sistema sería decimal y se adoptaría el uso de prefijos: mili, centi, kilo, etc.

Este sistema métrico se hace obligatorio en Francia en 1837. En 1875 se conforma la organización internacional de pesas y medidas con sede en París. En 1960 la Conferencia General de Pesas y Medidas y la Oficina Internacional de Pesas y Medidas decidieron unánimemente la creación de un sistema internacional de unidades de medición (SI). De esta forma se define un sistema de medidas a nivel mundial que elimina las barreras comerciales relacionadas con la medición.

En Costa Rica, el primer intento de implementación de un sistema de pesos y medidas se dio en 1857 durante el gobierno de Juan Mora Porras; no llegó a aplicarse por falta de reglamentación. En 1881 se hace un nuevo intento que desemboca en un nuevo fracaso. En 1884 se reglamenta la ley pero se aplica en un número muy reducido de campos. Un nuevo intento, sin frutos, se dio en 1927. Finalmente, en 1972, mediante una reforma a la ley 34 (de julio de 1884), se adopta el sistema métrico decimal para pesos y medidas. Posteriormente dicha reforma se constituye en la ley 5292 en la que se decreta como obligatorio el uso del Sistema Internacional de Medidas (SI). En el año 2002 esta ley se reforma mediante la ley 8279, que integra también actividades de evaluación de la conformidad, que incluye calibración de instrumentos, inspección, control, etc. Esta ley crea el Laboratorio Costarricense de Metrología que lleva a cabo, entre otras, las labores mencionadas.

Nota: Es interesante mostrar a los estudiantes que a partir del metro, medida de longitud, se construye el decímetro. A partir del dm, se construyen la medida de volumen, el dm^3, la medida de capacidad, el litro y la medida de masa, el kilógramo.

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

Segundo Ciclo, Relaciones y álgebra

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

En este ciclo tenemos que continuar con el estudio de sucesiones de números naturales debido a que la búsqueda de patrones y la necesidad de hacer conjeturas potencializa el desarrollo de habilidades relacionadas con el estudio del álgebra y de las funciones. La introducción de contenidos como la regla de tres, proporción y porcentaje ampliarán las posibilidades de las aplicaciones y la construcción de modelos matemáticos.

Métodos

1. Privilegiar procesos matemáticos relacionados con la búsqueda de patrones en sucesiones numéricas o no numéricas para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional.

2. El uso de letras en lugar de espacios en blanco o cuadraditos que ocupan el lugar de números variables permiten avanzar en la dirección de los tipos de pensamientos mencionados y a un mayor nivel de abstracción.

3. Las representaciones de pares ordenados de números racionales no negativos en el plano de coordenadas también es un proceso que conecta el álgebra con la geometría y abre espacios para las representaciones funcionales que serán fundamentales en ciclos posteriores.

4. El estudio de relaciones de proporcionalidad directa e inversa debe utilizar situaciones conocidas por los estudiantes y modelos que estimulen su aprendizaje e interés por las matemáticas. Problemas de compras, descuentos, geométricos y utilizando recetas culinarias que impliquen el uso de proporcionalidad son cercanos a la cotidianidad del estudiante.

5. La conversión de una representación a otra también merece ser privilegiada. En particular es importante que los estudiantes puedan representar simbólicamente (expresiones algebraicas) enunciados dados en forma verbal.

6. El uso de programas computacionales como por ejemplo hojas de cálculo, facilita el proceso de hacer conjeturas y búsqueda de patrones entre números. La calculadora también ayuda a efectuar largos cálculos como los que aparecen en situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, al tratar con datos microscópicos o datos macroscópicos como poblaciones mundiales y distancias estelares entre otros. La idea es que estas herramientas ayuden al estudiante en la búsqueda de relaciones matemáticas.

7. En este ciclo los estudiantes pueden describir cambios cualitativos como: crece más rápido que, crece más despacio que. Además pueden distinguir tipos distintos de cambios cuantitativos como un crecimiento aritmético y un crecimiento geométrico.

8. Otras aplicaciones prácticas para el sexto grado son los problemas relacionados con regla de tres, porcentaje y ecuaciones de primer grado como las sugeridas en la tabla de contenidos y habilidades específicas.

   Por ejemplo, en periódicos podemos encontrar ofertas especiales como:

Estos anuncios se prestan para plantear preguntas como: Si el precio de cierto objeto costaba ¢210 500 y en oferta cuesta ¢199 000, ¿cuál es el descuento porcentual del objeto? Si un objeto con 25% de descuento cuesta ¢239 000 ¿cuánto costaba el objeto sin el descuento? Si el precio de un objeto con el impuesto de venta incluido es de ¢209 900 ¿cuál es el precio del objeto sin el impuesto de venta?, entre otras preguntas.

9. Como en el ciclo anterior, los modelos matemáticos planteados deberían ser sencillos y se recomienda el uso de objetos, dibujos, figuras, símbolos y variables para modelar situaciones que involucran suma, resta, multiplicación y división de números naturales.

Gestión

La lección se inicia con una situación problema que sirva para motivar a los estudiantes y como un medio de acceder a nuevos conocimientos. El docente orienta y organiza a los estudiantes para que ellos puedan analizar y discutir acerca del problema o situación dada y, finalmente, el docente institucionaliza los conocimientos construidos a través de las actividades realizadas.

Un esquema del plan de lección en el que se van a introducir nuevos conceptos podría ser: planteamiento de una actividad o situación problema que permita repasar conocimientos que serán necesarios para los nuevos conceptos; planteamiento de una actividad o situación problema relacionada con el nuevo concepto; organización de la clase en grupos, trabajo de los estudiantes dentro de los grupos, aportes de los grupos (oralisación, comparación y discusión de los resultados) en torno a la situación o problema planteado, institucionalización del conocimiento, reforzamiento del conocimiento mediante resolución de ejercicios o problemas por parte de los estudiantes y, finalmente, asignación de tareas o proyectos para realizar en la casa.

Es importante que se planifique con cuidado el uso de recursos, los tiempos asignados a las actividades y la institucionalización. Para la actividad inicial, hay que tomar en cuenta el tiempo para que los estudiantes trabajen en la situación problema, discutan en sus grupos y comuniquen sus hallazgos con todo el grupo y el profesor.

El profesor, como guía, tiene que organizar las actividades y las discusiones, evitando dar respuestas prematuras a los grupos de trabajo. Motive a los estudiantes para que plantee problemas a partir de una situación dada.

Considere en la planificación el tiempo para la búsqueda de proyectos que sean interesantes para los estudiantes, y el tiempo necesario para evaluarlos.

Recursos

Como en el Primer ciclo es conveniente utilizar materiales manipulables de distintos tipos, incluyendo el geoplano, el soma, papel de construcción, materiales reciclables, objetos del entorno del aula. Los materiales manipulables deben ser utilizados de manera reflexiva en situaciones de aprendizaje en dónde su uso facilite la comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

Utilizar elementos de la historia de la matemática: anécdotas, biografías, desafíos, paradojas, y muchos de estos recursos se encuentran en Internet. También existen programas computacionales educativos que sirven de soporte para la construcción de los conocimientos y de motivación para los estudiantes.

Existen otros recursos de fácil acceso para todos los estudiantes, como periódicos, revistas, etiquetas de productos, publicidad, con información real que pueden ser utilizadas en proyectos y en el planteamiento de situaciones contextualizadas. El Programa Estado de la Nación publica un Informe anual, un sistema de seguimiento del desempeño de Costa Rica, con cuatro capítulos: equidad e integración social; oportunidades, estabilidad y solvencia económicas; armonía con la naturaleza; fortalecimiento de la democracia. Además ofrece un capítulo especial en cada edición con temas variados. Este tipo de información potencializa la conexión de las matemáticas con otras disciplinas, como por ejemplo los estudios sociales y el español.

Procesos

Los procesos en los que se debe hacer hincapié en este ciclo son:

- Reconoce y propone patrones en forma oral y escrita.
- Usa el método de resolución de problemas.
- Usa y diseña modelos sencillos.
- Realiza redacciones simples utilizando símbolos matemáticos.
- Realiza conexiones entre la matemática y otras disciplinas.
- Utiliza representaciones relacionadas con la modelización.

Uso de tecnologías

En el Segundo ciclo se puede introducir el uso de la calculadora sencilla (no necesariamente científica), pues permite disminuir los cálculos rutinarios y concretar esfuerzos en los procesos de razonamiento, de aplicación o realización de conjeturas, procesos que son más significativos para el dominio de las diferentes áreas de las matemáticas.

La tecnología se puede utilizar para que a través de problemas se les dé un sentido práctico a las matemáticas. Los procesos asociados a estos problemas son: conexiones, resolución de problemas y modelización. Además el nivel de complejidad es de conexión pues enlaza esta área con la de *Números.*

Área	**Año**	**Tecnología utilizada**	**Problema**	**Comentarios**
Relaciones y álgebra	6°	Calculadora	María decide preparar una receta muy apetitosa que encontró en un libro de cocina, pero dicha receta dice que debe poner el horno a 325 grados Fahrenheit (°F) y el horno que ella tiene está en grados Centígrados (°C). Muy preocupada se dirige donde su vecina y le dice que por favor le preste su horno un momento, ya que el de ella no sirve para preparar la receta. La vecina le dice que el horno sí sirve, que solo debe hacer una conversión de grados Fahrenheit (°F) a grados Centígrados (°C) y que para ello puede utilizar la siguiente fórmula: $C = \frac{5}{9} \times (F - 32).$ ¿A cuántos grados centígrados debe poner el horno María, redondeándolo a la decena más cercana?	Este problema se puede utilizar también en V año, cambiando la fórmula por $C = \frac{5}{9} F - \frac{160}{9}.$ El docente puede aprovechar la actividad y dar otros ejemplos de temperaturas dadas en grados Fahrenheit y para aquellos estudiantes más talentosos se les puede preguntar por el proceso inverso, es decir darle una temperatura en Centígrados y que calculen una aproximación de la temperatura en Fahrenheit.

Problemas y situaciones didácticas

Las situaciones o problemas a tratar en este ciclo en el área de *Relaciones y álgebra*, tenderán a la consolidación en el uso de la notación simbólica, la ampliación del conjunto de números utilizados, en el uso de sucesiones y el determinar su ley de formación mediante el análisis de sus términos y el estudio de las relaciones de proporcionalidad directa y la inversa, razones y proporciones. Se consideran tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión. A continuación se proporcionan ejemplos para cada grado, de cada nivel. El primer problema del grado corresponde a reproducción (⚇), el segundo a conexión (☯) y el tercero a reflexión (◷).

4° Año

⚇ Calcule: $128 - 96 \div 4 + 12 \times \frac{1}{6}$

Solución

$$128 - 96 \div 4 + 12 \times \frac{1}{6} = 128 - 24 + 2 = 106$$

Hay que plantear situaciones en diferentes contextos para que los estudiantes, mediante la prueba y error logren reconocer la prioridad de las operaciones para resolverlas y aplicarla para encontrar la solución.

☯ Considere el siguiente mapa de Costa Rica. Construya una regla de cartulina con la escala que aparece en el mapa. Mida con la regla construida la distancia en línea recta de San José a Liberia y la distancia de San José a Golfito. Diga cuál distancia (en kilómetros) es la mayor, y por cuántos kilómetros es mayor.

Solución

Observe que de acuerdo a la escala del mapa, 2,5cm representa 100 km. Al medir, en el mapa, con la regla de cartulina se tiene que de San José a Liberia hay una distancia de 4cm, y de San José a Golfito 4,3cm. Para calcular las distancias "reales" aproximadas el estudiante debe explorar las siguientes relaciones: si 2,5cm representa a 100 km entonces 4 cm representa ___ y si 2,5km representa a 100 km entonces 4,3cm representa a ___. Como en cuarto año no se desarrolla el tema de proporciones se puede simplificar las anteriores relaciones sabiendo que si 2,5cm representa 100km entonces 0,5cm representa 20km, ya que 0,5 es la quinta parte de 2,5 al igual que lo es 20 de 100. Análogamente, 0,1cm representa 4km ya que 0,1cm es la quinta parte de 0,5 y 4 es la quinta parte de 20. Por lo tanto, se tienen las siguientes distancias "reales":

Como de San José a Liberia se mide 4cm, o sea 8 ×0,5cm, entonces la distancia real es 8 × 20km que es igual 160km.

De San José a Golfito se mide 4,3cm, o sea 8 ×0,5cm + 3×0,1cm, entonces la distancia real es 8 × 20km + 3×4km que es igual 172km.

Se observa que de San José a Golfito es mayor la distancia por 12km que de San José a Liberia.

Importante: Hay que indicar que por el tipo de terreno de Costa Rica no existe una carretera en línea recta de San José a esos lugares. Es por ello, que las distancias calculadas son menores a las recorridas en las carreteras reales respectivas.

Este tipo de ejercicios apoyan el proceso educativo y son fundamentales para que el estudiante desarrolle el aprecio y disfrute de las matemáticas.

🕘 Complete los espacios representados por una línea, con los números que faltan: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ___, ____, ____ y explique cómo logró obtener los números faltantes.

Solución

Al plantear el anterior problema, se le debe dar el tiempo suficiente al estudiante de explorar el comportamiento de la sucesión de números. Luego, se debe discutir ampliamente con los estudiantes los posibles patrones que hayan encontrado.

Es importante discutir como en esta sucesión no se suma, resta, multiplica un valor constante, sino que cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores. En la siguiente tabla se representa el comportamiento de la sucesión:

Patrón	**Términos de la sucesión**
	1
	1
1+1	2
1+2	3
2+3	5
3+5	8
5+8	13
8+13	**21**
13+21	**34**
21+34	**55**

Asimismo, se debe indicar que esta sucesión se le conoce como Sucesión de Fibonacci y que esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Además, se puede ampliar explicando que tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa y en el arreglo de un cono.

Sugerencia

Se puede hacer la simulación de la sucesión por medio de la pareja de conejos y notar cómo crece aceleradamente las parejas de conejos.

5° Año

✇ Un panadero hace diariamente 12 panes dulces menos que panes salados. Complete la tabla que sigue mostrando cómo el número de panes dulces *d* depende del número de panes salados *s*.

d	s
40	52
45	
55	
58	

Solución

Lo más importante a resaltar en un problema como éste es la relación de dependencia que tiene la cantidad de panes dulces con respecto a la cantidad de panes salados.

s	*d*

100	88
75	**63**
52	**40**
12	**0**

También es importante observar que para que esta relación se mantenga la cantidad mínima de panes salados que el panadero debe hacer es 12.

Es deseable, que se pudiera generalizar la relación de dependencia con lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$$d = s - 12$$

☯ Considere la siguiente tabla para responder a las preguntas que siguen:

Perímetro del cuadrado (cm)	8	12	20
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5

¿Qué perímetro correspondería a un lado de 17 cm? ¿Qué lado correspondería a un perímetro de 56 cm?

Solución

En el cuadro se puede apreciar que el perímetro de un cuadrado es igual a cuatro veces la medida de su lado.

Perímetro del cuadrado (cm)	4×2	4×3	4×5	?	4×?=56
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5	17	?

Por lo tanto, si el lado es 17cm entonces el perímetro P = 17×4 = 68cm.

Si el perímetro de un cuadrado es 4 veces la medida de su lado, entonces la medida del lado es la cuarta parte del perímetro del cuadrado. Si el perímetro es 56cm entonces el lado mide

$$56 \div 4 = 14\ cm$$

En la pulpería que se encuentra cerca de la escuela, tres docenas de huevos se venden por ¢ 2 400. ¿Cuánto hay que pagar por 180 huevos?

Solución

Tres docenas corresponden a 36 huevos. Luego $\frac{180}{36} = 5$, lo que significa que por 180 huevos hay que pagar 2 400 × 5 = ¢12 000

Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de autoestima en relación con el dominio de la matemática.

Los tres problemas anteriores deben ser aprovechados por el docente para activar los procesos de razonamiento y argumentación.

6° Año

Tengo ¢10 000 para comprar uvas, cada kilo cuesta ¢2 000. Si compro 2 kilos ¿cuánto dinero me queda? y si compró 4 kilos más, ¿qué pasa con mi dinero?

Solución

Si se compran 2 kilogramos se gasta ¢4 000, sobrando así ¢10 000 – ¢4 000 =¢6 000.

Si luego se compra 4 kilogramos más se gasta ¢8000, pero solo sobraban ¢6 000, lo que significa que no alcanza el dinero. Si el vendedor es conocido entonces podría anotarme en su cuaderno de deudores, en ese caso le debería al vendedor ¢2 000. Si el vendedor no aceptara entonces mejor me llevaría 3 kilogramos extra y no 4.

☯ En un supermercado encontramos la siguiente lista de ofertas de verduras:

Si compro 2 kilos de cebolla, 5 chiles dulces, 4 plátanos maduros y 3 remolachas, ¿cuántos colones ahorro en la compra y qué porcentaje representa este ahorro comparado con el precio normal de las verduras?

Solución

Ahorro	**Compra con el precio normal**
2 kilos de cebolla: 165 × 2 = ¢330	2 kilos de cebolla: 955 × 2 = ¢1910
4 plátanos maduros: 30 × 4 = ¢120	4 plátanos maduros: 160 × 4 = ¢640
3 remolachas: 45 × 3 = ¢135	3 remolachas: 285 × 3 = ¢855
El total del ahorro es 135 + 120 + 330 = ¢585	Precio total: 1910 + 640 + 855 = ¢3405

Hay un ahorro de ¢585. Para calcular el porcentaje que representa este ahorro comparado con el precio normal de las verduras se divide el total de ahorro entre el total de la compra en precio normal y se multiplica por 100, o sea 585 ÷ 3 405 × 100 = 17,18%.

La razón entre la edad de mi padre y la mía es de 4:1. Si actualmente tengo 12 años de edad, ¿cuál será la razón entre la edad de mi padre y la mía dentro de 12 años?

Solución

Si x representa la edad actual del padre entonces se puede formular la siguiente proporción:

$$4:1::x:12$$

$$4\times 12\div 1=x$$

$$48=x$$

Por lo tanto, actualmente el papá tiene 48 años. Dentro de 12 años el papá tendrá 60 años y el hijo 24 años así la razón será 5:2 ya que $\frac{60}{24}=\frac{5}{2}$.

Los tres problemas anteriores deben apoyar la actitud de confianza en la utilidad de la matemática.

El primer y segundo problemas de 6° año deben ser aprovechados por el docente para activar los procesos resolución de problemas y comunicación.

Comentarios sobre los problemas

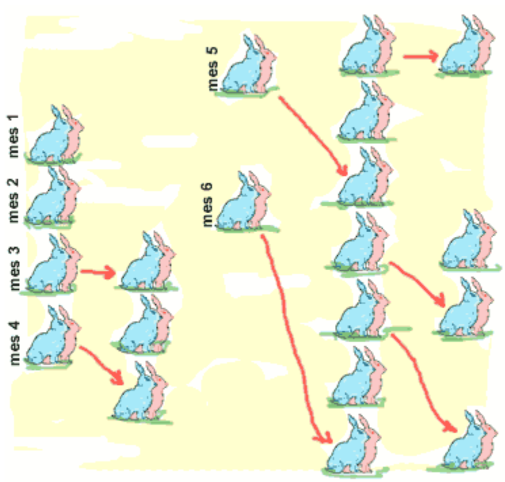
Algunos de los problemas propuestos buscan la utilización de situaciones contextualizadas que implican el uso de regla de tres, proporción directa, porcentaje, así como ecuaciones de primer grado de los tipos indicados. Las distintas representaciones también son utilizadas.

Uso de historia de las matemáticas

Problema: Fibonacci y los números de Fibonacci

Los patrones formados por sucesiones aritméticas y geométricas son muy antiguos. El papiro Rhind contiene problemas relacionados con estas sucesiones, que fueron copiados por el escriba egipcio Ahmes, alrededor de 1650 A. C. En el año 1202, el matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci y considerado uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media en Europa, planteó problemas parecidos a los encontrados en dicho papiro, en su obra *Liber Abaci* (Libro del Ábaco), un libro con quince capítulos, que popularizó el sistema de numeración hindo-arábico en Europa. En la época en que vivió Fibonacci no existía la imprenta. Sus libros, así como las copias de ellos, fueron escritos a mano.

Un problema famoso planteado por Fibonacci en la obra mencionada es el de reproducción de conejos: suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja de conejos procrea una nueva pareja, que es fértil a los dos meses. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendremos al final de 1 año?



Los primeros números de Fibonacci son: $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55.$ Se observa que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. La sucesión anterior se conoce como sucesión de Fibonacci mientras que los números que aparecen en ella se llaman números de Fibonacci. Esta sucesión aplicaciones en las artes, arquitectura, mercado financiero, y con la razón aurea. Realmente un tema interesante para un trabajo de investigación de los estudiantes.

Por ejemplo, en la flor del girasol se encuentran pequeños granos en forma de diamante, encerrados por arcos de curvas en forma de espirales logarítmicas con origen en el centro y tal que el número de espirales en la dirección de las agujas del reloj y el número de espirales en la dirección contraria, son términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci: 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 en un sentido y 144 en el otro.

Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales. El número de espirales de una piña también siguen un patrón de acuerdo a la sucesión de Fibonacci: 8 y 13, o bien 5 y 8.

Según la filotaxia, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo la sucesión de Fibonacci.

Por lo general, las sucesiones como las de Fibonacci, cuyo término que ocupa la posición *n* depende de dos o más términos anteriores son muy importantes, y la expresión que permite calcular un término de la sucesión a partir de términos anteriores se denomina relación recursiva, y es usual decir que la sucesión es recursiva o definida recursivamente. En Internet (http://oeis.org/) existe una base de datos con las sucesiones utilizadas por los científicos y aficionados, con más de 150 mil tipos de sucesiones. En esta enciclopedia en línea de sucesiones de enteros, el usuario puede seleccionar el idioma, digitar los primeros términos de una sucesión no conocida y presionar el ícono de búsqueda para encontrar posibles informaciones acerca de la sucesión.

Referencia: The National Council of Teachers of Mathematics (2006) *Historical topics for the Mathematics classroom*. Reston: NCTM, Inc.

La Enciclopedia On-Line de las Secuencias de Números Enteros. http://oeis.org/. Recuperado el 10/05/2011.

Texto: Diofanto: el padre del álgebra

Poco se sabe de la vida de Diofanto de Alejandría, un matemático griego nacido en Alejandría entre el año 200 y 214 A. C. y considerado el padre del álgebra. Se sabe que él estudió y trabajó en la Universidad de Alejandría, Egipto y que vivió 84 años debido a un epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega:

> Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su barbilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. Dime ¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte? (Epigrama 126, Libro XIV Antología Griega)

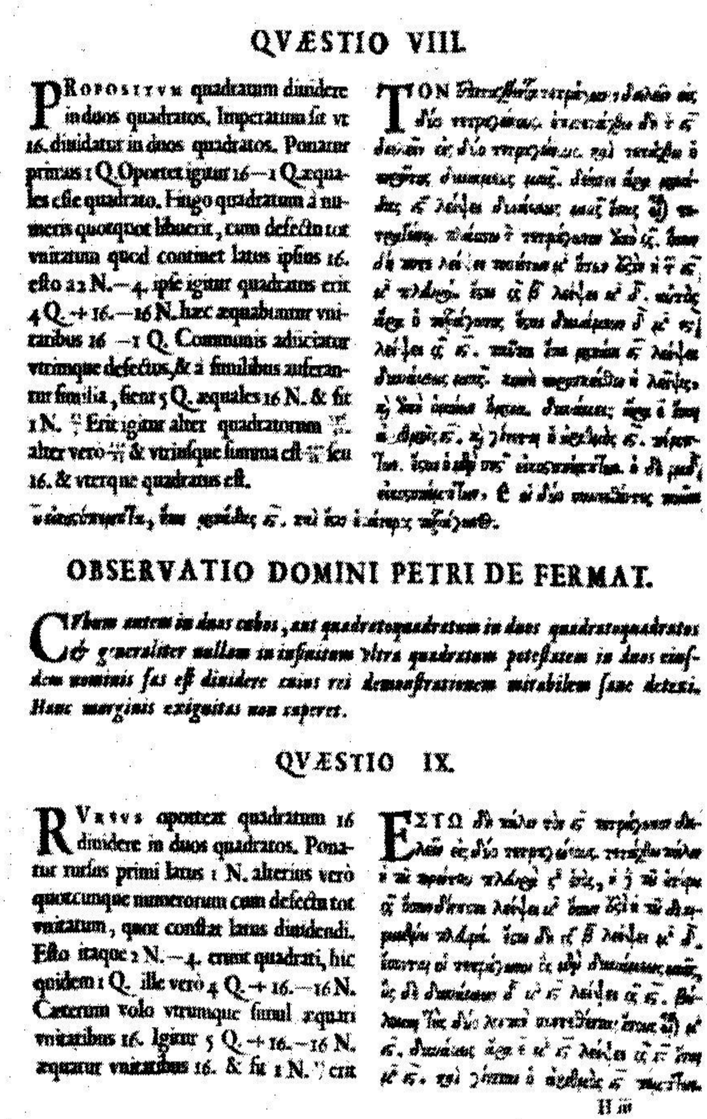
Si usted resuelve el problema podrá comprobar que Diofanto falleció a la edad de 84 años.

Diofanto escribió una obra conocida como Aritmética, que constaba de 13 libros de los que sólo se han encontrado 6 escritos en griego y recientemente fueron encontrados 4 escritos en árabe. En 1621 se publicó una edición Latina de Aritmética comentada de Bachet de Méziriac, edición que fue reimpresa en 1670 por el hijo de Fermat, con comentarios que Fermat había escrito en los márgenes del libro. En la página 61 de la edición de 1670 de Aritmética aparece el problema II-8 y una nota de Fermat: imposible dividir un cubo en una suma de dos cubos, o una potencia $n > 2$ en una suma de dos potencias n, conocido como el último teorema de Fermat, un problema bastante famoso que fue resuelto en el año 1995 por el matemático Andrew Wiles.

Diofanto introdujo un simbolismo algebraico para las ecuaciones (notación sincopada), por cierto un simbolismo bastante complicado si lo comparamos con el actual. Pero él también estableció reglas para multiplicar expresiones algebraicas, las leyes de signos (más por menos es menos, etc.), y reglas para multiplicar potencias, además de plantear y resolver varios problemas.

Por ejemplo, el problema I-1 (problema número 1 del libro I): Dividir 100 en dos números cuya diferencia entre ellos sea 40. Él resolvió el problema, utilizando su complicada notación y obtuvo la respuesta: 30 y 70. Posteriormente él resolvió el problema general: dividir un número *a* en dos números cuya diferencia es igual a *b*. La solución obtenida, utilizando notación actual es $\frac{a-b}{2}$ y $\frac{a+b}{2}$.

De esta forma, Diofanto procuró resolver casos generales para los problemas planteados, además de resolver situaciones particulares como ejemplo, y por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa ecuaciones algebraicas.



QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. [illegible] Erit igitur alter quadratorum [illegible] alter verò [illegible] & vtriusque summa est [illegible] seu 16. & vterque quadratus est.

[illegible]

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. — 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. [illegible] erit

[illegible]

H iii

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema, y se exponen posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

Desayunando con gallo pinto

Estimar la cantidad y el costo de los materiales que serán utilizados para preparar un gallo pinto para los estudiantes y la maestra o el maestro del grupo, para conmemorar un día especial. Se forman grupos para que busquen la solución a la situación planteada.

Modalidad	Área	Año	Objetivo
Proyecto	Relaciones y álgebra	6° Año	Aplicar proporción entre cantidades numéricas Aplicar porcentaje en situaciones del contexto

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Se toma en consideración el trabajo en equipo y la participación de todos los miembros en el análisis de la estrategia a utilizar.

- *Diseño de la estrategia que involucra la situación problema:* Se evalúa la organización del equipo para hacerle frente al problema, la creatividad y la originalidad de la estrategia planteada, tomando en cuenta la factibilidad y la búsqueda de información que optimice la calidad y el costo de los materiales que serán utilizados.

- *Implementación de la estrategia:* Se evalúa el uso correcto de los procesos matemáticos, la originalidad y factibilidad de lograr una respuesta de manera ágil y correcta así como la decisión acerca de los instrumentos de cálculo a utilizar (cálculo mental, uso de papel y lápiz, uso de calculadora) en cada situación.

- *Análisis de los resultados:* Se toma en consideración si la estrategia utilizada para realizar la selección de los materiales es la más apropiada y si el procedimiento para realizar los cálculos es correcto y eficiente. También es importante evaluar las argumentaciones utilizadas para los posibles cambios de estrategia.

- *Comunicación de los resultados y conclusiones:* Evaluar la comunicación de los resultados en forma oral y escrita, donde cada equipo elabore un breve informe de cuáles fueron las dificultades mayores que se les presentaron como también cuáles procesos le resultaron más fáciles y que se puede mejorar en caso de otra oportunidad de repetir el proyecto. Tome en consideración si los resultados obtenidos responden a la pregunta planteada así como su factibilidad.

- *Conclusión:* Se evalúa que la respuesta dada contenga los elementos necesarios que solucionan el problema planteado.

- *Selección de la mejor estrategia*. Se evalúa la participación y argumentos utilizados para la decisión de cuál es la estrategia que será utilizada por todo el grupo.

Situación problema

Consumo diario de proteínas

La palabra proteína procede del griego "proteios" que significa primordial, indicando la importancia de la proteína para nuestro organismo. En realidad las proteínas constituyen el componente más importante del organismo después del agua, pues son la materia con la cual están formados los tejidos.
¿Cuál es la cantidad adecuada de proteínas que debemos consumir diariamente?
Según la OMS (Organización Mundial de la Salud) la cifra adecuada es de 0,85 gramos diarios de proteínas por quilogramo de peso.

Modalidad	Área	Año	Objetivo
Problema	Relaciones y álgebra	6° Año	Representar mediante tablas relaciones entre dos cantidades que varían simultáneamente Resolver problemas utilizando porcentaje Resolver problemas utilizando regla de tres

a. *Complete la siguiente tabla que relaciona la cantidad diaria de proteínas con el peso de la persona.*

Peso de la persona (kg)	Cantidad de proteínas diarias necesarias
40	
45	
50	
60	
70	

b. *Si en la etiqueta (declaración de nutrientes) de una caja de cereales se indica que contiene 3 gramos de proteínas, y que corresponde a un 4% de la proteína que una persona debe de consumir diariamente. ¿Cuántos gramos del cereal tendría que comer diariamente esta persona para completar su cuota diaria de proteínas?*
c. *Según el criterio de la OMS, ¿cuál es el peso aproximado de la persona de la pregunta anterior?*

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* Aquí se califica si el estudiante realmente realizó intentos escritos, o bien, lectura y discusión grupal orientada hacia la comprensión del problema planteado.

- *Establecimiento de una estrategia:* Una vez comprendido el problema, es conveniente calificar el tipo de estrategia empleado por el estudiante. En este caso, se deben considerar aspectos como la originalidad, su factibilidad, conexión y belleza

- *Desarrollo de la Estrategia:* Se valora si el estudiante hace un uso adecuado de procedimientos matemáticos para desarrollar la estrategia.

- *Autorreflexión sobre la estrategia:* En este punto se evalúa la pertinencia de la estrategia empleada, valorando si el estudiante mantiene un control sobre algunas variantes del problema.

- *Análisis de los resultados:* Se considera la pertinencia o coherencia de los resultados obtenidos, así como su factibilidad. Se puede valorar la comprensión que tiene el estudiante de la situación por medio de preguntas.

- *Conclusión:* Es la respuesta a las preguntas planteadas.

Segundo Ciclo, Estadística y probabilidad

Indicaciones metodológicas y de gestión

Introducción

En este ciclo se debe complementar las habilidades adquiridas previamente por los estudiantes. Muchas de las ideas generadas en el ciclo anterior deben ser ratificadas; pero además debe ampliar sus posibilidades con la adquisición de nuevas estrategias de recolección, resumen y análisis de datos. Por esta razón, se requiere diseñar situaciones y problemas que impliquen nuevos retos para el tratamiento de los datos, hasta donde sea posible, vinculadas con situaciones concretas de la realidad estudiantil; no obstante, queda abierta la posibilidad de incluir situaciones simuladas y juegos, que posibiliten la incorporación de datos que no son de fácil obtención en la cotidianidad. Las habilidades de lectura de información desarrolladas en el primer ciclo deben ser redirigidas hacia un análisis crítico y objetivo de la información que proporcionan los datos.

En relación con el manejo de situaciones aleatorias y de la probabilidad, este ciclo permite dar un salto cualitativo, pues de una idea intuitiva sobre probabilidad que se genera en el primer ciclo, se pasa a calcular probabilidades como una proporción de resultados favorables entre el total de posibles resultados. Esto posibilita que el estudiante se pueda introducir hacia una mejor comprensión de las situaciones aleatorias; por ello es importante estructurar problemas simples vinculados con la toma de decisiones, asociados a las probabilidades.

Aunque se incorporan estrategias que pueden llevarse a situaciones muy complejas para este nivel escolar, el docente debe saber dosificarlas, pues únicamente se pretende introducir a los estudiantes en el uso de esas técnicas para recolectar y resumir información. Por ejemplo, la elaboración y aplicación adecuada de un cuestionario es un trabajo para especialistas en el tema, por ello en el ciclo se busca acercar al estudiante hacia el conocimiento del recurso y el tipo de datos que proporciona.

Métodos

1. El docente debe identificar aquella información del entorno estudiantil con mayor potencial académico para ser utilizada en los análisis que se desarrollen de modo que permita explorarla, analizarla, interpretarla y criticarla.

2. Al incorporar la experimentación con el empleo de mediciones dentro de los procesos de recolección de información, también se está generando un nuevo tipo de datos, denominados

cuantitativos continuos. En el Primer Ciclo, únicamente se utilizaron técnicas que involucran la recolección de datos cuantitativos discretos; este nuevo dato merece un análisis especial. No obstante, en el ámbito de la primaria no se pretende hacer una amplia discusión sobre el tema de la continuidad, sino generar en el estudiante una idea intuitiva. Por ello, se recomienda enfatizar en la forma de recolectarlos: mientras los discretos se obtienen por conteo, los continuos se obtienen por medición A partir de este elemento se pueden ir identificando diferencias entre los dos tipos de datos.

3. Los conceptos de dato como unidad primaria y de variabilidad como fuente principal de los análisis estadísticos deben tener un importante rol dentro de la discusión general. Por la complejidad que implica la medición de la variabilidad, únicamente se determina el recorrido de los datos como una primera aproximación, medidas de variabilidad más precisas se abordarán en la secundaria. Sin embargo, es importante plantear situaciones en las cuales se comparen grupos de datos con variabilidades diferentes; esto permitirá al estudiante alcanzar una mejor comprensión sobre la importancia del concepto y la necesidad de cuantificarlo.

4. Aunque se trabaja en la construcción de cuadros y gráficos, así como en la determinación de algunas medidas de resumen, se debe enfatizar en que ellas son únicamente herramientas, lo fundamental dentro de Estadística radica en el mensaje general y específico que se desea suministrar con cada técnica. Estos elementos deben verse como un vehículo para proporcionar ese mensaje y ofrecer una respuesta concreta al problema original. Sin embargo, los cuadros y gráficos son formas de comunicar un mensaje, por ello debe buscarse estrategias que permitan favorecer una adecuada representación. Las computadoras son un recurso muy valioso para lograr este objetivo.

5. En relación con el punto anterior, aunque los gráficos en tres dimensiones tienen mucha aceptación en diversos sectores no se debe recomendar su uso, pues en algunas ocasiones se prestan para confusión. En este sentido, se debe recordar que el propósito de un gráfico es suministrar una información de la forma más simple posible, por ello cualquier elemento que pueda confundir debe descartarse.

6. Se debe prestar especial atención a los errores comunes dentro de los análisis estadísticos. El docente debe estar atento a identificar los problemas que se generen alrededor de estos malos usos. Un error común es el empleo de frecuencias absolutas para realizar análisis comparativos entre grupos. Por ejemplo, de acuerdo con la información de un colegio, para un año particular, desertaron 45 estudiantes de noveno año y únicamente 10 de décimo año; esto podría equivocadamente hacer pensar que los niveles de deserción son mayores en noveno que en décimo, lo cual no fue cierto pues la matrícula inicial en esa institución para noveno año fue de 398 estudiantes y para décimo de 81, por lo que los porcentajes de deserción fueron 11,3% y 12,0% respectivamente. Este ejemplo permite identificar que, aunque en muchos análisis estadísticos se utiliza la frecuencia absoluta, ella no es una herramienta adecuada cuando se realizan comparaciones entre grupos. Para estos casos es preferible utilizar la frecuencia porcentual.

7. Otro error común es el denominado "*falacia del jugador*", por medio del cual se cree que, en una situación de probabilidades fijas, un evento que ha ocurrido puede afectar las probabilidades de ocurrencia futuras. Por ejemplo, se cree que si un número ha logrado el premio mayor de la Lotería Nacional en un sorteo tiene menos probabilidad de obtener ese mismo premio en el sorteo siguiente.

8. Por lo anterior, en las situaciones en que se identifiquen errores en la utilización de recursos estadísticos o probabilísticos por parte de los estudiantes, es importante plantear ejemplos que pongan en evidencia las incongruencias sobre interpretaciones a las que dicho error podría conducir, tal como los ejemplos planteados acá.

9. En relación con los gráficos circulares o de pastel, se pretende únicamente que el estudiante esté en capacidad de interpretar la información que se suministra. Si se cuenta con una computadora es posible discutir su elaboración; pero no se recomienda entrar en una construcción manual, pues requiere de gran inversión de tiempo y esfuerzo.

10. Nuevamente debe recordarse que para facilitar la interpretación, tanto cuadros como gráficos deben llevar un título que permita hacer una lectura sin necesidad de leer el contexto donde se generó; por ello, el mismo debe ser suficientemente explícito.

11. El ritmo de avance en materia de los análisis aleatorios y probabilístico es pausado, pues la temática así lo obliga. Pero es fundamental generar situaciones que propicien las habilidades planteadas. Deben considerarse espacios muestrales con un número pequeño de elementos, pues lo que se pretende es que los estudiantes comprendan ciertas propiedades e interrelaciones básicas y las puedan poner en práctica.

12. En el análisis de las probabilidades, los juegos de azar permiten establecer ejemplos que favorecen la comprensión del estudiante. Por ello deben estar presentes en todo momento. Sin embargo, es fundamental no promover las apuestas dentro de este proceso, debe mantenerse en un carácter lúdico.

13. En el proceso de diseñar y aplicar el cuestionario para recolectar datos, hay que tener claro que es una introducción al empleo de este recurso. Por ello se debe simplificar su uso para resolver situaciones muy concretas donde se puedan plantear unas pocas preguntas, preferiblemente cerradas que incluyan escalas simples o abiertas de respuesta breve. No obstante, hay que procurar que cumplan ciertas normas básicas en el empleo de este recurso, como la introducción, el orden de las preguntas, la redacción, entre otras.

Gestión

Para el logro de las habilidades, la mayoría de actividades que se proponen implican el trabajo del estudiante en búsqueda de respuestas a situaciones o problemas que implican responder ciertas interrogantes, por lo que nuevamente se recomienda priorizar el trabajo en grupo de 3 o 4 estudiantes, de modo que pueda establecerse un trabajo colaborativo en el análisis de cada una de las situaciones planteadas por el docente.

Los problemas o interrogantes establecidos deben tener un nivel de dificultad acorde con las habilidades que se desean generar, por lo que se debe buscar ir incrementando paulatinamente su nivel de dificultad e involucrar más de una particularidad de un ente a la vez. Esto permite establecer relaciones entre grupos de datos, aunque a un nivel básico. Al igual que en el Primer Ciclo, las situaciones de aprendizaje planteadas no deben ser simplemente la repetición de las actividades previas, sino implicar un reto adicional. Nuevamente es fundamental incluir problemas situaciones que puedan ayudar a crear conciencia sobre tópicos de interés como reciclaje, ambiente, alimentación, etc.

Recursos

El contexto es el principal recurso a privilegiar en la generación de las habilidades propuestas. Por ello, los mismos estudiantes, la escuela, sus hogares o la comunidad son los principales generadores de datos de distinta naturaleza que están a disposición del docente, para el planteamiento de problemas o situaciones de aprendizaje. No obstante, en este nivel, puede ser necesaria la simulación de situaciones que brinden datos propicios para el desarrollo de una determinada habilidad. Sin embargo, se recomienda que aunque sea ficticia, la misma pueda ser comprendida en un determinado contexto. También los juegos de azar con monedas, dados, ruletas, bolas, entre otros tienen especial relevancia, sobre todo en el análisis de las probabilidades.

También se pueden recurrir a fuentes de datos de instituciones, periódicos, entre otros.

Debe recordarse que los recursos utilizados para generar datos deben despertar el interés del estudiante, de modo que se sienta motivado para realizar el tratamiento de los datos y ofrecer respuesta a los problemas planteados.

El recurso informático y el uso parcial de la calculadora cobran especial atención en este ciclo. Se ha insistido en que la elaboración de cuadros y gráficos así como el cálculo de medidas constituyen simplemente una herramienta, por lo que el recurrir a un programa computacional para apoyar la resolución de problemas permite reducir el tiempo, mejorar la presentación y permitir que los estudiantes se concentren en el análisis y la interpretación de la información que le generan los datos.

Uso de tecnologías

En el Segundo ciclo se puede introducir el uso de la calculadora sencilla (no necesariamente científica), pues permite disminuir los cálculos rutinarios y concretar esfuerzos en los procesos de razonamiento, de aplicación o de realización de conjeturas, procesos que son más significativos para el dominio de las diferentes áreas de las matemáticas.

La tecnología se puede utilizar para que a través de problemas se les dé un sentido práctico a las matemáticas. Los procesos asociados a estos problemas son: conexiones y resolución de problemas y modelización. Además el nivel de complejidad es de conexión pues enlaza esta área con la de *Números.*

Área	**Año**	**Tecnología utilizada**	**Problema**	**Comentarios**
Estadística y probabilidad	4°	Calculadora sencilla	Samuel desea abrir una empresa de seguridad, para ello debe investigar sobre los salarios ofrecidos a guardas privados de otras empresas, y así ofrecer salarios competitivos. Al preguntarles a 15 guardas de seguridad sobre sus salarios, las respuestas fueron: 285 000; 320 000; 290 000; 300 000; 255 620; 300 000; 302 000; 356 000; 223 000; 229 000; 223 000; 303 000; 223 500; 323 000; 287 000. a. Si Samuel obtiene el promedio de estos salarios. ¿Para qué le puede servir este dato? b. Si Samuel obtiene la moda de estos salarios. ¿Para qué le puede servir este dato?	

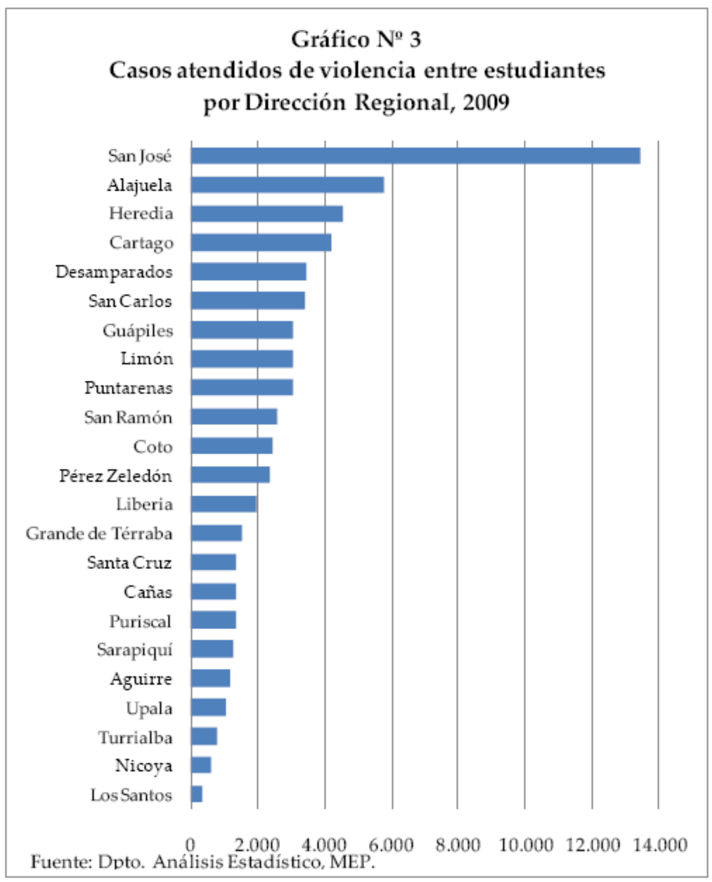
Problemas y situaciones didácticas

Al igual que en el Primer Ciclo, las situaciones problema que se deben estructurar para este ciclo deben enfocarse hacia escenarios concretos, aunque el nivel de dificultad debe ir en aumento. Para cada año se plantean tres problemas: el primero de ellos es de reproducción de las habilidades adquiridas (✇), el segundo se denomina de conexión(☯), pues vincula conceptos de estadística o probabilidades con otras áreas y el tercero es de reflexión (🕘), que obliga al estudiante a razonar un poco más sus análisis. No obstante, se debe indicar que por la naturaleza de estas áreas, muchos elementos se entremezclan.

4° Año

✇ Mediante el trabajo en subgrupos se puede plantear a cada uno de ellos situaciones que les permita realizar una adecuada lectura de información que se presenta mediante cuadros, gráficos u otros medios. A uno de los subgrupos se le puede plantear la siguiente situación:

El Departamento de Análisis Estadístico del MEP recolecta la información vinculada con los hechos de violencia que se presentan en las instituciones educativas del país.



De acuerdo con esta información, para el año 2009:

a. ¿En qué direcciones regionales se presentaron, más de 4 000 casos de violencia?

b. ¿En cuántas direcciones regionales se presentaron más de 2 000 casos de violencia?

c. De las seis regiones geográficas del país y que aparecen en el siguiente mapa ¿Qué región ocupó el primer lugar en casos de violencia?

Solución

A continuación se brindan las respuestas a las preguntas anteriores

a. Cartago, Heredia, San José, Alajuela.
b. En 12 direcciones regionales.
c. Región central

Sugerencia

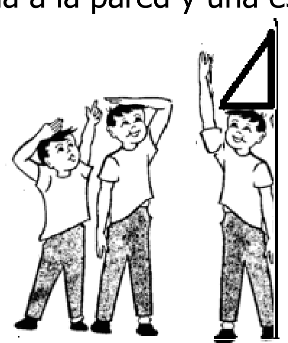
Para la última pregunta los estudiantes deben ubicar la región educativa dentro de las regiones del país, y sin necesidad de cálculos pueden responder.

Aprovechar este problema para enfatizar sobre la problemática que se evidencia en el gráfico y los problemas que genera la violencia en los centros educativos. Por ejemplo, se puede consultar a los estudiantes ¿qué pueden hacer ellos para contribuir con la disminución de la violencia?

☯ Para potenciar el análisis con características continuas, se puede plantear situaciones como las siguientes a cada uno de los subgrupos.

Se desea determinar si existen diferencias de estatura por sexo para los estudiantes del grupo. Atiendan las siguientes indicaciones y respondan las preguntas planteadas

a. Los estudiantes del subgrupo deben determinar la estatura de cada estudiante y anotarla en una lista donde estén los nombres de todos los compañeros. Pueden utilizar una cinta métrica pegada a la pared y una escuadra tal como se muestra.



b. Con el apoyo de la representación gráfica y del cálculo de las medidas de tendencia central proceda a responder las siguientes preguntas:
   i. De acuerdo con la información recabada, en general ¿quiénes tienen mayor estatura en el grupo: los varones o las mujeres?
   ii. ¿Para qué sexo las estaturas son más variables?

Sugerencia

Para estas respuestas se espera que, por su propia iniciativa hayan construido diagramas de puntos por sexo y hayan determinado las principales medidas de tendencia central que se han analizado, para con estos dos elementos puedan tener suficiente evidencia para responder.

🕘 Plantear el siguiente problema para que sea analizado en subgrupos

Suponga que usted junto a otros dos compañeros deciden jugar con una moneda para analizar las probabilidades que se asocian con ella. El juego consiste en lanzar la moneda tres veces y se establecen los siguientes eventos:

A: Obtener un escudo

B: Obtener dos escudos

C: Obtener tres escudos

Si usted debe seleccionar primero y puede escoger uno de estos eventos ¿cuál de ellos escogería para tener mayor probabilidad de ganar? ¿Por qué?

Solución

Los eventos A y B tienen las mismas posibilidades. Cada uno tiene tres formas de ocurrir. Si e representa escudo y c corona, entonces:

$$A=\{(e,c,c),(c,e,c),(c,c,e)\}$$

$$B=\{(e,e,c),(e,c,e),(c,e,e)\}$$

El evento que tiene menos posibilidades de ocurrir, es la opción C, ya que sólo hay una forma de que ocurra (e,e,e).

5° Año

⚇ En cuanto al uso del cuestionario para la recolección de información, se recomienda plantear varios temas para que sean desarrollados en subgrupos. Un ejemplo de los que se pueden plantear es el siguiente.

Suponga que deseamos determinar ¿cuántas horas al día invierten los estudiantes del grupo en actividades recreativas o para dormir en un día cualquiera entre semana? Para ello deben seleccionar los temas habituales que acostumbran realizar los estudiantes; entre ellas:

1. Ver televisión
2. Jugar fuera de la casa
3. Jugar dentro de la casa
4. Realizar trabajos escolares
5. Otros

Sugerencia

Se debe consultar a todos los estudiantes del grupo para caracterizar estas actividades. Se les puede orientar para que elaboren un cuestionario de la forma siguiente:

CUESTIONARIO SOBRE EL USO DEL TIEMPO LIBRE

El presente cuestionario tiene por objetivo conocer la distribución de tiempo libre de los estudiantes del grupo, en un día normal en que asiste a la escuela. Por favor responder cada una de las siguientes preguntas. Complete la información del cuadro incluyendo el número de horas por día que usted invierte en promedio en cada una de las siguientes actividades.

Actividad	Número de horas diarias
1) Ver televisión	
1) Jugar fuera de la casa	
2) Jugar dentro de la casa	
3) Realizar trabajos escolares	
5) Otras actividades	

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Una vez que apliquen el cuestionario deben buscar estrategias para resumir la información. El docente debe orientarlos en este proceso pues implica resumir información de varias variables al mismo tiempo. Las medidas de tendencia central son una buena estrategia en estos casos.

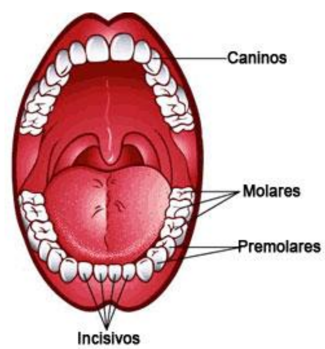
Media: La media aritmética es el valor obtenido por la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

Moda: La moda es el dato más repetido, el valor de la variable con mayor frecuencia absoluta.

☯ Plantear la siguiente actividad a los estudiantes para ser analizada en subgrupos:

Considere la siguiente lectura tomada del artículo “Tus dientes: salud infantil” de la revista digital para niños GTCIT.

> La mayoría de los niños tiene todos los dientes antes de cumplir 3 años. Se llaman dientes primarios y hay unos 20 en total. (También se llaman a menudo dientes de leche). Cuando el niño se hace algo mayor, estos dientes empiezan a caerse uno a uno. Quizás recuerdes la primera vez que se te cayó un diente; suele suceder entre los 5 y los 6 años, cuando el niño está en primer grado. Pero por suerte, cuando se caen estos dientes, no te quedas como un bebé, sin dientes y alimentándote de melocotones triturados. Un diente primario se cae para hacerle sitio al diente permanente que hay detrás de él. Lentamente, los dientes permanentes crecen y ocupan el lugar de los dientes primarios. Aproximadamente a los 14 años a la mayoría de niños se les han caído todos los dientes de leche y tienen todos los dientes permanentes. Hay 28 dientes permanentes en total -¡ocho más que antes! Unos 6 años más tarde, aproximadamente a los 20 años, crecen cuatro dientes más en la parte posterior de la boca, completando la serie con un total de 32 dientes.



Fuente: http://www.gtcit.com

Si una persona adulta, con todos sus dientes sanos, recibe un golpe que le daña una pieza dental, bajo el supuesto que puede ser cualquiera de sus dientes

a. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable?

A: El diente dañado es un canino
B: El diente dañado es un molar
C: El diente dañado es un incisivo
D: El diente dañado es un premolar

b. ¿Cuáles de esos eventos son igualmente probables?

c. Justifique las respuestas anteriores

Solución

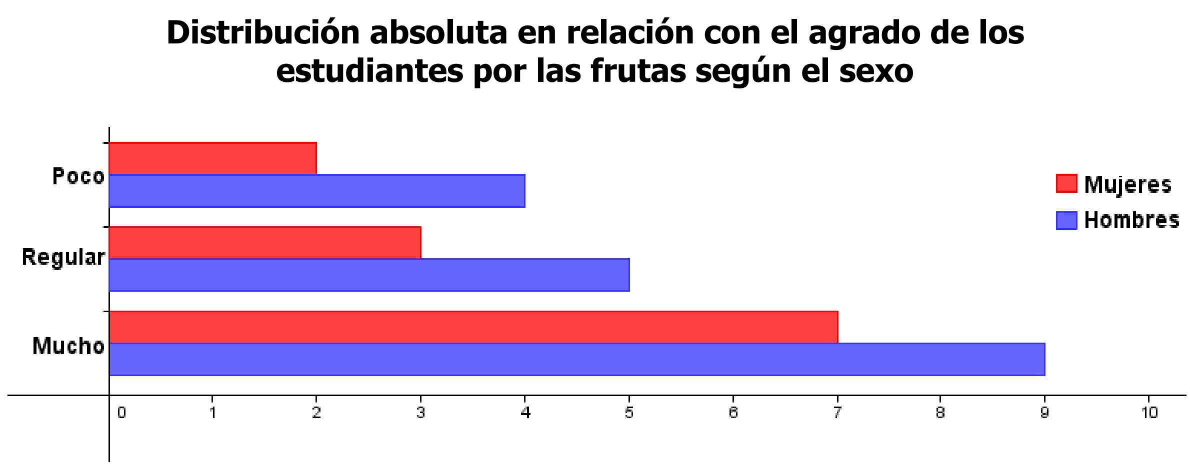
Las respuestas a las interrogantes anteriores son:

a. Hay mayor probabilidad para que el diente dañado sea un molar
b. Premolares e incisivos
c. Según la imagen la mayor cantidad de dientes corresponde a los molares. Por lo tanto, hay mayor posibilidad que sea el dañado. Por otro lado, hay la misma cantidad de dientes premolares e incisivos, por eso son igualmente probables.

Mediante una plenaria discuta los resultados obtenidos en cada grupo.

🕘 Como se ha venido planteando, los estudiantes deben ser capaces de interpretar información que se comunica por diferentes fuentes. El siguiente problema es un caso particular de esta situación. Se puede plantear para que sean analizados en forma individual y cerrar la actividad con una plenaria.

El siguiente gráfico muestra la preferencia por el consumo de frutas en un grupo de una escuela:



Con base en esta información

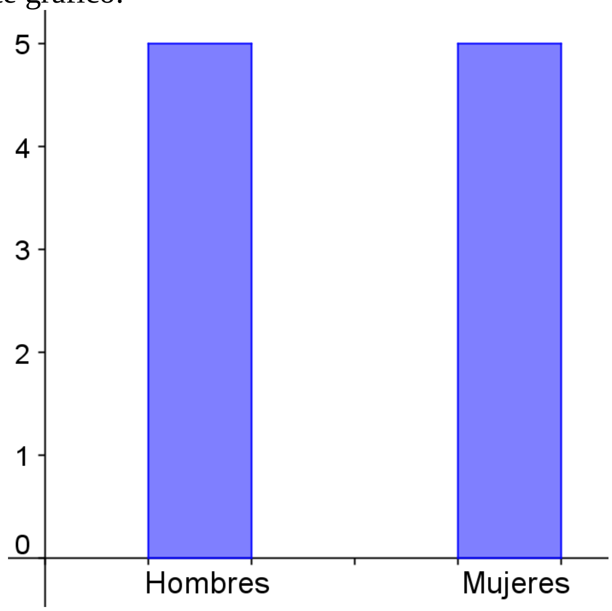
a. ¿Es válido concluir que los hombres tienen una mayor preferencia por las frutas que las mujeres? Justifique la respuesta.

b. Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿de qué manera presentaría usted esta información para identificar quién tiene mayor preferencia por el consumo de frutas: los hombres o las mujeres? Proceda a construir un gráfico o un cuadro donde realice esta corrección.

Solución

a. No, porque puede haber contradicción, los hombres prefieren más las frutas que las mujeres, pero a la vez a los hombres les gusta poco las frutas que a las mujeres.

b. Se debe dar un valor numérico a las características poco, regular o mucho tomando en cuenta su preferencia por las frutas. Por ejemplo, si poco tiene un valor de -1, regular un valor de 0 y mucho un valor de 1, se tendría el siguiente gráfico:



De acuerdo a la siguiente tabla de valores:

	Hombres (frecuencia absoluta)	**Valores**	**Mujeres (frecuencia absoluta)**	**Valores**
Poco	4	$4 \times -1 = -4$	2	$2 \times -1 = -2$
Regular	5	$5 \times 0 = 0$	3	$3 \times 0 = 0$
Mucho	9	$9 \times 1 = 9$	7	$7 \times 1 = 7$
Totales	18	**5**	12	**5**

6° Año

✇ El problema siguiente, se sugiere llevarlo a cabo junto con otros de la misma naturaleza, de modo que sea resuelto en un subgrupo y presentado posteriormente a una discusión general. Pueden utilizar calculadoras para simplificar los cálculos.

De acuerdo con el Centro Centroamericano de Población de la Universidad de Costa Rica, se tiene la siguiente información:

Estimación de la población de 70 años y más para Costa Rica en el 2012 según el sexo

Edad en años cumplidos	Masculino	Femenino
70-74 años	39 163	42 686
75-79 años	27 026	32 285
80-84 años	17 675	22 656
85-89 años	8 937	12 394
90-94 años	3 230	4 853
95 años y más	1 207	1 930
Total	97 238	116 804

http:ccp.ucr.ac.cr

a. Determine los porcentajes de población masculina y femenina para cada uno de los grupos de edad.

b. ¿Qué información relevante puede resaltar de estos datos en relación con los porcentajes de personas para cada sexo? ¿Qué se puede concluir?

Solución

Para el caso de la pregunta a, los resultados se resumen en el siguiente cuadro

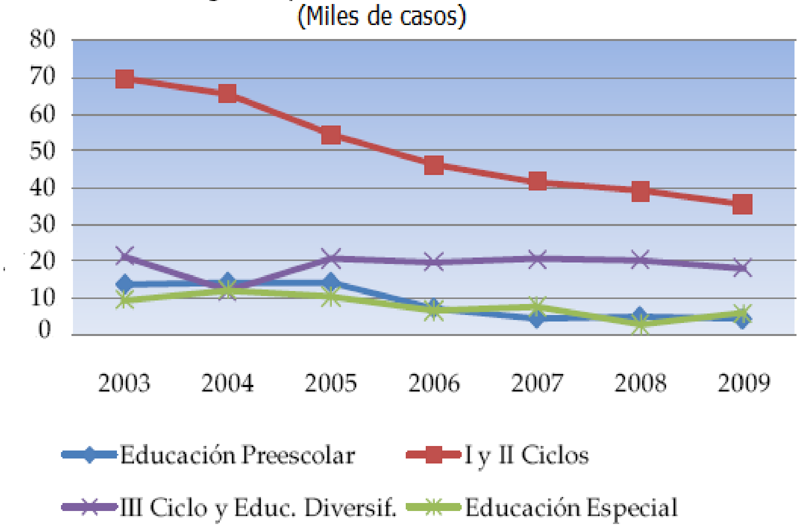
Masculino	**Femenino**
70-74 40,275%	70-74 36.545%
75-79 27.794%	75-79 27.640%
80-84 18.177%	80-84 19.397%
85-89 9.190%	85-89 10.611%
90-94 3.322%	90-94 4.155%
95 años y más 1.242%	95 ños y más 1.652%

En el caso de la pregunta b, es fundamental que el estudiante pueda razonar con base en la información obtenida en el punto *a* y justifique apropiadamente su respuesta.

☯ Al momento de representar información estadística con datos de gran magnitud, se acostumbra emplear una escala menor que representa generalmente algún múltiplo de 10 para reducir esa magnitud. El siguiente caso es un ejemplo de este tipo de situaciones. Se recomienda plantear este problema para que sea analizado en subgrupos.

El siguiente cuadro representa el número de casos (en miles) de violencia que fueron atendidos entre el 2003 y el 2009 en instituciones de educación pública

Gráfico Nº 1
Número de casos de violencia entre estudiantes, atendidos por el personal administrativo, 2003-2009
(Miles de casos)



Fuente: Departamento de Análisis Estadístico del MEP

a. Aproximadamente ¿cuántos casos de violencia se presentaron en el 2009 en Primer y Segundo ciclos?

b. ¿Cuáles son los elementos más relevantes que usted puede resumir de este cuadro?

c. ¿Cuál ha sido la tendencia que experimentó los casos de violencia entre el 2003 y el 2009 en Primer y Segundo ciclos? ¿Crecieron o disminuyeron los casos de violencia?

d. ¿Cuál ha sido la tendencia que se experimentó en este período en el Tercer ciclo y Ciclo diversificado?

e. Si se considera únicamente la información del cuadro anterior, en términos porcentuales ¿se podrá decir que hay más violencia en Primaria que en Secundaria? Justifique su respuesta.

Solución

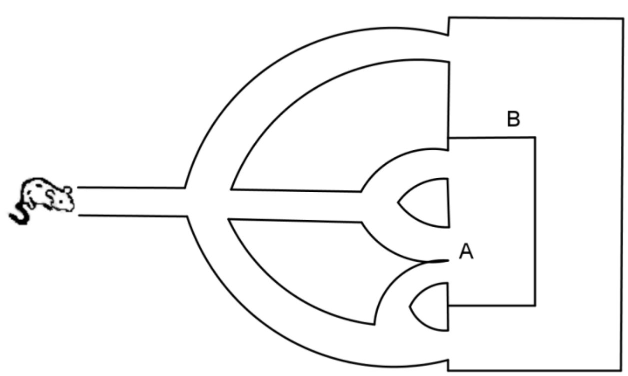
Las respuestas a las interrogantes anteriores se detallan a continuación:

a. Se presentaron 36 000 casos de violencia.
b. En las escuelas es donde existen mayores casos de violencia entre los estudiantes.
c. Los casos de violencia fueron disminuyendo cada año.
d. La tendencia es que desciende en el 1er año sin embargo para el siguiente vuelve a cifras similares, manteniéndose a lo largo de los años con una leve disminución en el último año.
e. No se puede determinar, pues a la hora de realizar porcentajes la cantidad total de estudiantes juega un papel importante.

🕘 Se recomienda plantear el siguiente problema para que sea trabajado en uno de los subgrupos.

Se ubica un ratón en el inicio del laberinto, hay varias puertas todas igualmente probables. Si se considera únicamente el primer recinto al que el ratón decide entrar, determine lo siguiente:

Problema adaptado del texto: Batanero, C y Godino, J. (2002). La estocástica y su didáctica. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada.



De acuerdo con lo anterior, determine las siguientes probabilidades:

a. Probabilidad que el ratón ingrese al recinto B
b. Probabilidad que el ratón ingrese al recinto A
c. Probabilidad que ingrese al recinto A o B

Solución

Las respuestas correspondientes a las preguntas anteriores son:

a. $\frac{2}{5}$

b. $\frac{3}{5}$

c. 1

Este tipo de problemas requiere ser discutido mediante una plenaria, donde el grupo que lo resolvió lo exponga a los compañeros y el resto del grupo cuestione los resultados obtenidos.

Uso de historia de las matemáticas

Origen de la Estadística

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadísticas, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales y otras cosas.

Godofredo Achenwall, profesor de la Universidad de Gotinga, acuñó en 1760 la palabra estadística, que extrajo del término italiano statista (estadista). Creía, y con sobrada razón, que los datos de la nueva ciencia serían el aliado más eficaz del gobernante consciente. La raíz remota de la palabra se halla en el término latino *status*, que significa "*estado" o "situación*". Esta etimología aumenta el valor intrínseco de la palabra por cuanto que la estadística revela el sentido cuantitativo de las más variadas situaciones.

www.uv.mx/cienciahombre/revistae/vol18num2/articulos/historia/index.htm

Elementos de evaluación de problemas y proyectos

A continuación se presentan dos situaciones-problema en el área de *Estadística y probabilidad*, los cuales recomiendan posibles estrategias para realizar su evaluación.

Situación problema

En cuanto al uso del cuestionario para la recolección de información, se recomienda plantear varios temas para que sean desarrollados en subgrupos. Un ejemplo de los que se pueden plantear es el siguiente:

Suponga que deseamos determinar ¿cuántas horas al día invierten los estudiantes del grupo en actividades recreativas en un día cualquiera entre semana?, para ello deben seleccionar los temas habituales que acostumbran realizar los estudiantes; entre ellas:

- *Ver televisión*
- *Jugar fuera de la casa*
- *Jugar dentro de la casa*
- *Realizar trabajos escolares*
- *Otros*

Modalidad	Área	Año	Habilidades específicas
Proyecto	*Estadística y probabilidad*	5°	1. Diseñar cuestionarios simples enfocados hacia la búsqueda de información. 2. Recolectar datos por medio de la aplicación de un cuestionario. 3. Resumir la información recabada por la aplicación de un cuestionario en una base de datos codificada. 4. Analizar la información recolectada por medio de un cuestionario mediante la elaboración de cuadros, gráficos con frecuencias absolutas, y el cálculo de medidas de tendencia central y de variabilidad.

Aspectos a evaluar

- *Explorar y comprender la situación problema:* Dado que es un cuestionario se refiere a las actividades recreativas que realizan los estudiantes en un día cualquiera entre semana. Se puede evaluar que los estudiantes aporten posibles actividades recreativas a tomar en cuenta para la recolección de información.

- *Diseño de la estrategia que involucra la situación problema:* Luego de consultar a todos los estudiantes del grupo para caracterizar estas actividades. Se les puede orientar para que elaboren un cuestionario de la forma:

CUESTIONARIO SOBRE EL USO DEL TIEMPO LIBRE

El presente cuestionario tiene por objetivo conocer la distribución de tiempo libre de los estudiantes del grupo, en un día normal en que asiste a la escuela. Por favor responder cada una de las siguientes preguntas. Complete la información del cuadro incluyendo el número de horas por día que usted invierte en promedio a cada una de las siguientes actividades.

Actividad	**Número de horas diarias**
1) Ver televisión	
c. Jugar fuera de la casa	
d. Jugar dentro de la casa	
e. Realizar trabajos escolares	
5) Otras actividades	

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Es importante que los estudiantes piensen en posibles estrategias para recolectar y resumir la información, el docente debe orientarlos en este proceso pues implica resumir información de varias variables al mismo tiempo. Las medidas de tendencia central son una buena estrategia en estos casos.

- *Implementación de la estrategia:* Una vez que apliquen el cuestionario a todos los estudiantes del grupo, se debe recolectar la información. Una estrategia podría ser que un grupo de cinco estudiantes recolecte la información del número de horas diarias que los estudiantes ven televisión, otro grupo de cinco estudiantes se encargue de recolectar la cantidad de horas diarias que invierten en jugar fuera de la casa, y así con todas actividades habrá un grupo de cinco estudiantes que recolectarán la información. Luego, se debe resumir la información. Al ser información de varias variables al mismo tiempo, una forma podría ser calcular el promedio de horas recolectadas o el número de horas más frecuente (moda) con que realizan la actividad correspondiente.

- *Análisis de los resultados:* Para realizar el análisis de los resultados se les pedirá a cada grupo de cinco estudiantes que respondan las siguientes preguntas de acuerdo a la información recolectada y presenten un informe acerca de la actividad:

1. ¿Cuál es el número o números más frecuentes de horas diarias que invierten los estudiantes en la actividad que le correspondió recolectar información?

2. Si sumamos todos los números de horas recolectadas y las dividimos entre la cantidad de números de horas recolectadas, ¿qué valor se obtiene?

3. Si al número máximo de horas se le suma el número mínimo de horas, y luego se divide entre dos, ¿qué valor se obtiene?

4. ¿Hay relación entre los tres valores obtenidos anteriormente? ¿Por qué?

5. ¿Qué pueden representar estos valores?

6. Cada respuesta puede ser evaluada de acuerdo a la información obtenida.

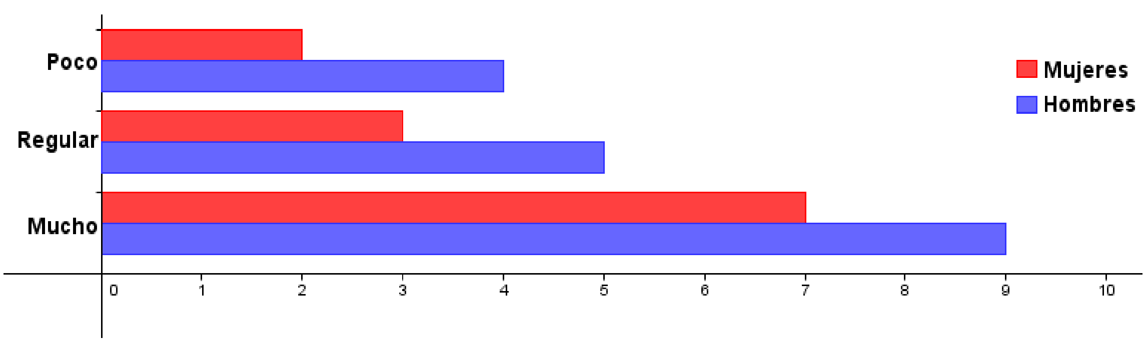
- *Comunicación de los resultados y conclusiones:* Es importante que cada grupo exponga a sus compañeros los resultados obtenidos y se motive una discusión con todo el grupo de estudiantes, por ejemplo que se discuta acerca de la importancia en dedicar suficiente tiempo a trabajos escolares y hablar un poco de lo perjudicial que puede ser para una persona el exceso de horas viendo televisión. También se debe discutir la importancia de los cuestionarios como medio de recolección de información; así como la importancia de las medidas de tendencia central para resumir la información en casos como este.

Situación problema

Es importante que los estudiantes sean capaces de interpretar información que se comunica por diferentes fuentes. El siguiente problema es un caso particular de esta situación. Se puede plantear para que sean analizados en forma individual y cerrar la actividad con una plenaria.

El siguiente gráfico muestra la preferencia por el consumo de frutas en un grupo de una escuela:

Distribución absoluta en relación con el agrado de los estudiantes por las frutas según el sexo



Con base en esta información

a. ¿Es válido concluir que los hombres tienen una mayor preferencia por las frutas que las mujeres? Justifique la respuesta.

b. Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿de qué manera presentaría usted esta información para identificar quién tiene mayor preferencia por el consumo de frutas: los hombres o las mujeres? Proceda a construir un gráfico o un cuadro donde realice esta corrección.

Modalidad	Área	Año	Habilidades específicas
Problema	*Estadística y probabilidad*	6°	1. Utilizar la frecuencia porcentual para resumir y clasificar conjuntos de datos. 2. Identificar la frecuencia porcentual como herramienta fundamental para los análisis comparativos entre dos o más grupos de datos.

Aspectos a evaluar

- *Exploración del problema:* En primera instancia se puede evaluar las observaciones que realice el estudiante acerca del gráfico. Es importante que estudiante note que en este gráfico hay más cantidad de hombres que de mujeres, hay 18 hombres y 12 mujeres. El estudiante se debe cuestionar si este hecho afecta a la interpretación de los datos. Además debe intentar responder la primera interrogante del problema:

  ¿Es válido concluir que los hombres tienen una mayor preferencia por las frutas que las mujeres? Justifique la respuesta.

- *Establecimiento de una estrategia:* Al explorar el gráfico el estudiante debe comprender que no es válido concluir que los hombres tienen una mayor preferencia por las frutas que las mujeres, debido a que el gráfico está elaborado con datos absolutos y en ese grupo hay más hombres que mujeres, no es adecuado realizar una comparación en cuanto al consumo de frutas utilizando las frecuencias absolutas, pues no siempre habrá en un grupo la misma cantidad de hombres que mujeres. Por lo tanto, se evidencia que es necesario buscar una técnica de resumen de información que permita comparar en términos relativos este consumo de frutas. Por esta razón, surge la necesidad de buscar una medida relativa para comparar los datos. Es por esto que se puede evaluar que el estudiante se plantee como estrategia el uso de porcentajes. Es deseable que el estudiante pueda deducir esto, con la motivación del maestro.

- *Desarrollo de la Estrategia:* Para exponer los datos, se puede evaluar que el estudiante construya un cuadro o un gráfico con los valores porcentuales, como el que se muestra a continuación.

Distribución porcentual en relación con el agrado de los estudiantes por las frutas según el sexo

Agrado por el consumo de frutas	Mujeres	Hombres
Poco	16,7	22,2
Regular	25,0	27,8
Mucho	58,3	50,0
Total	100,0	100,0

Para el cálculo de los porcentajes es permitido que los estudiantes puedan ayudarse con la calculadora, siempre y cuando ya hayan identificado el inconveniente que presenta el gráfico de la situación problema.

- *Autoreflexión sobre la estrategia:* En este punto se evalúa la pertinencia de la estrategia empleada. El estudiante debe analizar si el cuadro con la distribución porcentual verdaderamente le ayudará a responder la interrogante *b* del problema o deberá cambiar de estrategia.

- *Análisis de los resultados:* Se debe evaluar no solo la construcción de la tabla con porcentajes, si no también que el estudiante visualice porcentualmente que a las mujeres les gusta más las frutas que a los hombres. Esto puesto que, en cuanto al agrado por el consumo de frutas hay mayor porcentaje de mujeres que de hombres que indican que mucho, y menor porcentaje de mujeres que de hombres que indican que poco.

- *Conclusión:* Aparte de la conclusión que se obtuvo con respecto a la interrogante *b* (caso particular), el estudiante debe generalizar que es importante tener cuidado al realizar comparaciones con datos absolutos, pues como en este caso los datos pueden ser muy engañosos y no evidenciar con veracidad la información.

Pregunta dirigida

Está técnica metodológica es sumamente importante para favorecer el aprendizaje ya que mediante la interacción entre el docente y los estudiantes, el concepto matemático que se está discutiendo adquiere un mayor significado y favorece el debate. Las preguntas que se formulen deben de mantener una secuencia lógica, construir conocimiento y provocar el razonamiento. Y principalmente deben llevar al estudiante a la institucionalización del concepto que se está desarrollando. A continuación se presenta una situación en la que muestra a manera de ejemplo su implementación en el salón de clase.

Área	Año	Objetivo
Números	5°	Identificar con claridad el concepto de fracción impropia.

En el aula se desarrolla el siguiente diálogo donde **P** representa la intervención del docente y **E** la intervención del estudiante. El docente presenta la siguiente situación problema:

$$\frac{9}{4}$$

P: ¿Esto es una división?

E: Sí.

P: ¿Y cómo se divide esa cantidad?

E: Dividiendo el numerador por el denominador

P: ¿Su cociente es mayor o menor que uno?

E: Es mayor que uno porque el dividendo es mayor que el divisor.

P: ¿Y los cocientes de las fracciones propias como serían?

E: Son menores que uno.

P: ¿Hay otras maneras de representar esta fracción?

E: Con dibujos, es decir gráficamente.

P: ¿Se ocupan una o varias figuras iguales para representarla gráficamente?

E: Más de una, creo que dos.

P: Le solicita al estudiante que pase a la pizarra a realizar la representación gráfica.

E: No, se necesitan tres.

P: Entonces, ¿las fracciones en que el numerador es mayor siempre son mayores que uno?

E: Sí, y además ocupan más de una figura para representarlas.

P: A las fracciones en que su denominador es mayor que el numerador se le denominan *fracciones impropias* y representan cantidades mayores que la unidad.

Referencias en línea

Los siguientes sitios pueden ser usados como referentes para la planificación de actividades y situaciones didácticas del presente programa. En ellos se pueden encontrar actividades matemáticas, historia, acertijos, resolución de problemas, software libre y juegos para las diferentes áreas matemáticas que se desarrollan en este programa.

Dirección	**Descripción**
http://www.educatico.ed.cr/default.aspx	Portal educativo del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/	Portal Educativo del Ministerio de Educación de España.
http://mathworld.wolfram.com/	Sitio web de recursos matemáticos desarrollado por Erick Weisstein y aportes de diversas comunidades matemáticas del mundo.
http://www.matematicas.net/	El paraíso de las matemáticas
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/Secciones/index.htm	Revista electrónica del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php	EDUTEKA, Portal Educativo gratuito de la Fundación Gabriel Piedrahita Uribe (FGPU), se publica en Cali, Colombia, desde 2001.
http://www.divulgamat.net/	Centro de divulgación virtual de las matemáticas. Real Sociedad Matemática española
http://www.winmates.net/	Web educativa sobre **Competencias básicas en línea**. En el área matemática enfoca principalmente la resolución de problemas en función de ciertas Competencias Matemáticas de interés. Autor: Juan Antonio Cordero.
http://www.educarchile.cl/	Portal creado por el Ministerio de Educación de Chile y la Fundación Chile

http://www.redem.org/	Red Educativa Mundial. REDEM es una plataforma de difusión y manejo de nuevas herramientas, metodologías de enseñanza que se auto-alimenta de experiencias compartidas por centros o instituciones educativas a nivel internacional en sus diferentes formas y niveles de educación.
http://www.sectormatematica.cl/enlaces.htm	
http://www.portalplanetasedna.com.ar/escuelita.htm	Portal Educativo con aplicaciones flash para el aprendizaje de la Geometría y los Números para primaria.
http://recursostic.educacion.es/gauss/web/indice.htm	Portal educativo del Ministerio de Educación y el Instituto de Tecnologías Educativas que brinda al profesorado ítems didácticos y de *applets* de GeoGebra, que abarcan contenidos de ser utilizados tanto en la pizarra digital como en los computadores de los alumnos.
http://www.estadonacion.or.cr/index.php/apoyo-educativo/materiales-didacticos	
http://www.cubaeduca.rimed.cu/	Portal educativo del Ministerio de Educación de la República Cubana.
http://www.ceducar.info/CEDUCAR/enlaces-de-interes	Comunidad educativa de Centroamerica y República Dominicana.
http://www.waece.org/index.php	Asociación Mundial de Educadores Infantiles. Organización registrada en la Organización de Estados Americanos.
http://www.redkipus.org/	La **Red KIPUS- Red docente de América latina y el Caribe** es una alianza de organizaciones, instituciones y personas, involucradas con el desarrollo profesional y humano de los docentes. Apoyada por la UNESCO
http://www.redinnovemos.org/	Red de Innovaciones Tecnológicas para América Latina y el Caribe.
http://www.ite.educacion.es/	El Instituto de Tecnologías Educativas es la unidad del Ministerio de Educación español, responsable de la integración de las TICs en las etapas educativas no

	universitarias
http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/serie_aportes.php	Sitio Oficial del Gobierno de la Ciudad Autonoma de Buenos Aires, Argentina.
Geometer's Sckechpad http://www.dynamicgeometry.com/	Software comercial que permite la construcción y exploración dinámica en diferentes áreas de las matemáticas, principalmente la geometría.
Geogebra http://www.geogebra.org/cms	Es el software gratuito sencillo de utilizar y con cientos de ejemplos en Internet.
Regla y Compás http://zirkel.sourceforge.net	Software libre donde se pueden construir diferentes figuras geométricas con elementos básicos.
Cabri II Plus www.cabri.com	Software comercial con gran potencial para la enseñanza – aprendizaje de la geometría euclideana y analítica. Permite construir objetos geométricos y luego trasladarlos, girarlos y estudiar en ellos la simetría.
Geonext http://geonext.uni-bayreuth.de/	Software libre que permite la creación de construcciones geométricas con diferentes herramientas.
www.cabri.com	Software comercial que permite construir cuerpos sólidos para una mejor comprensión de los mismos y su visualización.

Bibliografía y referencias usadas

45 000 en Costa Rica verán en estadio beatificación de Juan Pablo II. (2011). *ACI Prensa*, Recuperado de http://www.aciprensa.com/noticia.php?n=33122

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Carl Friedrich Gauss. (2011). *Wikipedia*. Recuperado en Mayo 26, 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Casado, S. (n.d.). *Los sistemas de numeración a lo largo de la historia*. Recuperado de http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html#E

Chavarría, J., & Chaves, E. (2008). Desarrollo histórico y percepción del proceso de implementación del sistema internacional de unidades en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *4*, 99-123.

Dalakov, G. (2011, mayo 25). *The logarithms and rules*. Recuperado de http://history-computer.com/CalculatingTools/logarythms.html

Descartes, R. (2008). *La géométrie* [Editado por Hermann, A. Versión de 1886]. Recuperado de http://www.gutenberg.org/ebooks/26400/26400-pdf.pdf, doi: ISO-8859-1

Diofanto de Alejandría. (2011). *Wikipedia*. Recuperado en Mayo 26, 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandría

Enzensberger, H. (1998). *El diablo de los números.* Madrid: Ediciones Siruela.

Euclides. (1991). *Los elementos* [Traducción de María Luisa Puertas]. Madrid: Gredos.

Golden Radio. (2011). *Wikipedia*. Recuperado en Mayo 26, 2011, de http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

Katz, V. (2010). *A history of mathematics: An introduction. (falta lugar):*Addison-Wesley.

La enciclopedia on-line de las secuencias de números enteros. (2011, mayo 26). Recuperado de http://oeis.org/

Malba, T. (2010). *El hombre que calculaba* [Sitio diseñado y colocado en la web por La Tiendita de Diac]. (Adobe Reader), Recuperado de http://www.pregonandolaverdad.org/literatura/otros_libros/el-hombre-que-calculaba.pdf

Niccolò Fontana Tartaglia. (2011). *Wikipedia*. Recuperado en Mayo 26, 2011, de http://es.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Fontana_Tartaglia

Perero, M. (1994). *Historia e historias de Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Pierce, R. (2008, abril 08). *Razón de oro*. Recuperado de http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/razon-oro.html

Poveda, R., & Murillo, M. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *UNICENCIA, 20*(1), 125-133.

Programa Estado de la Nación (2008). *Estado de la región en desarrollo sostenible, un informe desde Centroamérica y para Centroamérica.* San José, Costa Rica: autor.

Programa Estado de la Nación (2010). *Decimosexto informe estado de la nación en desarrollo humano sostenible.* San José, Costa Rica: autor.

Programa Estado de la Nación (2011). *Estado de la Educación 3.* San José, Costa Rica: Consejo Nacional de Rectores, Programa Estado de la Nación.Ruiz, A. (1999). *Geometrías no euclidianas*. San José: EUCR.

Tahan, M. (1972). *El hombre que calculaba*. España: Ed. Verón.

Tellechea, E. (2002). *Notas para el taller de entrenamiento de la preselección.* Informalmente publicado manuscrito, Matemáticas, Universidad de Sonora, Sonora, México. Recuperado de http://www.mat.uson.mx/eduardo/entrspresel2002.pdf

The National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*[Traducción de José María y Jesús Casado]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

The National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*.[Traducción de Manuel Fernández Reyes]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

The National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Historical topics for the mathematics classroom*. Reston: NCTM, Inc.

Un tercio de la humanidad podría contraer la nueva gripe en 2010. (2009). *El Mundo,* Recuperado de http://www.elmundo.es/elmundosalud/2009/05/07/medicina/1241700820.html